

Instituto Politécnico Nacional



Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada
Unidad Legaria

**Matemáticas para la Inclusión: Intervención
Didáctica en Adolescentes Vulnerables de
Casas Hogar Basadas en la Teoría APOE**

Tesis que para obtener el grado de
Doctora en Matemática Educativa
Presenta

Silvia Patricia Romero Hidalgo

Directores de Tesis

María Trigueros Gaisman
Mario Sánchez Aguilar

Ciudad de México, junio 2025

RESUMEN

La vulnerabilidad ha sido un campo poco estudiado en la Matemática Educativa. La vulnerabilidad se refiere al riesgo de exclusión en algún ámbito. En esta investigación se propone una intervención didáctica para prevenir la exclusión de adolescentes que viven en casa hogar. La propuesta integra aspectos cognitivos y afectivos, y apoya el acceso a la educación de nivel medio superior de la población de adolescentes que viven en casa hogar. Se empleó la teoría APOE y la Pedagogía inclusiva como marcos teóricos para guiar el desarrollo del trabajo.

Se contemplan los elementos de la metodología de investigación de la teoría APOE y la descripción de factores contextuales del contexto que dificultan el trabajo en las actividades. En el ámbito cognitivo se propuso una descomposición genética titulada “El triángulo y sus propiedades” la cual aborda los conceptos geométricos que las estudiantes requieren para presentar el examen de admisión a la educación media superior. Se establece un Espacio de Condiciones de Posibilidad que propicia el desarrollo de las construcciones mentales en un entorno de seguridad y afecto positivo. Durante las sesiones de trabajo se identifican los factores que obstaculizan el aprendizaje, a estos se les denomina interferencias. Este trabajo presenta un estudio de caso comparativo, a través del cual se busca establecer la relación entre las construcciones mentales y los factores del contexto de vulnerabilidad de la población de estudio. La recolección y el análisis de datos incluyó diversos elementos: entrevistas, documentos de trabajo, audios y transcripciones, y exámenes de conocimientos.

Se presentan los resultados de las construcciones mentales y las interferencias que se observaron durante el desarrollo de las actividades y sus posibles vínculos. Los resultados indican que la intervención resultó efectiva no solo para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático, sino también para fortalecer la confianza de las adolescentes en su capacidad para continuar sus estudios y enfrentar con mayor autonomía el reto de ingresar a la educación media superior.

ABSTRACT

Vulnerability has received limited attention within the field of Mathematics Education. It is understood as the risk of exclusion in a particular domain. This study proposes a didactic intervention aimed at preventing the exclusion of adolescents living in residential care homes. The intervention integrates both cognitive and affective dimensions, with the objective of supporting access to high school education for this population. The theoretical framework guiding this research combines the APOS theory and the principles of Inclusive Pedagogy.

The study incorporates methodological elements from APOS-based educational research, along with an analysis of contextual factors that hinder engagement in learning activities. From a cognitive perspective, a genetic decomposition titled “*The triangle and its Properties*” was designed to address the geometric concepts required for admission to high school education. A Space of Conditions of Possibility was established to foster the development of mental constructions within a safe and emotionally supportive environment. Throughout the intervention, various obstacles to learning- termed interferences- were identified and analyzed.

This work is structured as a comparative case study, seeking to explore the relationship between mental constructions and the contextual factors linked to their vulnerability conditions. Data collection included interviews, students’ written work, audios recordings and transcriptions, and mathematical achievement tests.

The findings highlight both the mental constructions and interferences observed during the activities, as well as potential connections between them. The results suggest that the intervention was effective not only in promoting the development of mathematical thinking, but also in enhancing the students’ self-confidence in their academics and fostering greater autonomy in pursuing the high school education.

ÍNDICE GENERAL

Índice General	4
Índice de figuras	6
Índice de tablas	11
1. Planteamiento del problema	
1.1 Introducción	12
1.2 Objetivos y preguntas de investigación	13
1.3 El concepto de vulnerabilidad en la educación matemática	14
1.4 Poblaciones vulnerables estudiadas en Matemática Educativa	15
1.5 Conclusión	18
2. Marco teórico	
2.1 Introducción	20
2.2 La teoría APOE	20
2.3 La Pedagogía Inclusiva	23
2.4 Espacio de Condiciones de Posibilidad	25
2.5 Conclusión	27
3. Marco Metodológico	
3.1 Introducción	29
3.2 Estudio de caso	29
3.3 Perfil de la Población	30
3.3.1 Selección de casos	31
3.4 Diseño	32
3.4.1 El caso del triángulo	33
3.4.2 Descomposición Genética “El triángulo y sus propiedades”	33
3.4.3 Análisis de las actividades	35
3.4.4 Examen de evaluación de conocimientos	92
3.4.5 Examen de evaluación post COMIPEMS	94
3.5 Recolección y análisis de datos	94
3.6 Trayectoria de vida	98
3.7 Conclusión	99

4. Resultados	
4.1 Introducción	100
4.2 Resultados del análisis cognitivo y del análisis de las interferencias	100
4.2.1 Resultados de la Fase I	101
4.2.2 Resultados de la Fase II	119
4.2.3 Resultados de la Fase III	143
4.2.4 Resultados de la Fase IV- Relaciones entre triángulos: Congruencia	160
4.2.5 Resultados de la Fase IV-Relaciones entre triángulos: Semejanza	168
4.2.6 Resultados de la Fase IV-Relaciones entre triángulos: Razones Trigonométrica	180
4.2.7 Resumen: construcciones mentales e interferencias	188
4.3 Comparativo de respuestas del examen de conocimientos	191
4.4 Resultados de la entrevista y evaluación post-COMIPEMS	201
4.5 Conclusión	206
5. Discusión y conclusiones	
5.1 Introducción	209
5.2 La construcción de un Esquema	209
5.3 Sobre los conocimientos previos	211
5.4 Resultados en contexto	212
5.5 Gestión docente	218
5.6 La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como aporte a la justicia social	220
5.7 Respuesta a las preguntas de investigación	221
5.8 Recomendaciones y futuras líneas de investigación	225
5.10 Conclusión	227
REFERENCIAS	229
ANEXOS	240

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Modelo inclusión/exclusión. Autoría propia.	15
Figura 2 Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático en estudiantes de educación básica. (Arnon et al., 2014, p. 154).	21
Figura 3 Relación de los componentes del ciclo de investigación y enseñanza de APOE. (Adaptación propia de Asiala et al., 1996).	22
Figura 4 Representación del Espacio de Condiciones de Posibilidad sustentado sobre elementos cognitivos y afectivos.	27
Figura 5 Fases que integran la Descomposición Genética “El triángulo y sus propiedades”.	36
Figura 6 Palitos de madera de diferentes longitudes dentro de una bolsa de plástico.	42
Figura 7 Desigualdad del triángulo	43
Figura 8 Grupo de figuras de la Actividad 3 incisos a), b), c) y d).	46
Figura 9 Rectas que cortan y ángulos entre ellas.	48
Figura 10 Rectas que se cortan con un ángulo de 56° entre ellas.	49
Figura 11 Rectas paralelas cortadas por una secante con un ángulo conocido de 65° .	50
Figura 12 Rectas paralelas cortadas por una secante.	51
Figura 13 Actividad 6 Ejercicio 1 incisos a) y b)	51
Figura 14 Triángulo ABC	52
Figura 15 Rectas paralelas cortadas por una secante, incisos a) y b)	52
Figura 16 Triángulo doblado por los puntos medio de los lados AB y BC.	54
Figura 17 Grupo de figuras de la Actividad 8 incisos a), b) y c).	54
Figura 18 Ejercicio.	56
Figura 19 Ejercicio.	56
Figura 20 Ejercicio.	57
Figura 21 Ejercicio.	57

Figura 22 Ejercicio.	58
Figura 23 Ejercicio.	58
Figura 24 Triángulo.	59
Figura 25 Triángulo.	59
Figura 26 Triángulos incisos a) y b)	60
Figura 27 Desarrollo plano de caja sin tapa y ejemplo de caja.	61
Figura 28 Triángulos.	62
Figura 29 Triángulos.	63
Figura 30 Triángulo rectángulo.	66
Figura 31 Triángulo que representa el asta bandera.	66
Figura 32 Segmentos.	67
Figura 33 Triángulos de fomi de diferentes formas, tamaños y colores.	69
Figura 34 Triángulos.	69
Figura 35 Triángulos.	71
Figura 36 Triángulos.	72
Figura 37 Triángulos.	74
Figura 38 Grupo de triángulos de la Actividad 5 inciso 4 a), b) y c).	74
Figura 39 Triángulos de fomi de diferentes formas, tamaños y colores.	76
Figura 40 Triángulos semejantes.	76
Figura 41 Triángulo Actividad 2 Ejercicio 1 Incisos a) y b)	77
Figura 42 Triángulo Actividad 2 Ejercicio 2 Incisos a) y b)	78
Figura 43 Triángulo Actividad 2 Ejercicio 3	79
Figura 44 Triángulos.	80
Figura 45 Triángulos.	81
Figura 46 Triángulos.	81
Figura 47 Grupo de figuras de la Actividad 5 Ejercicio 2 Incisos a), b), c), d) y e).	82
Figura 48 Triángulos.	84
Figura 49 Triángulos.	86
Figura 50 Triángulos.	86
Figura 51 Triángulos.	86

Figura 52 Triángulo ABC.	87
Figura 53 Triángulo ABC.	88
Figura 54 Triángulo PQR.	89
Figura 55 Triángulo.	89
Figura 56 Triángulo.	90
Figura 57 Triángulo.	90
Figura 58 Triángulo.	91
Figura 59 Triángulo.	91
Figura 60 Triángulo	92
Figura 61 Triángulo	92
Figura 62 Triángulos semejantes	93
Figura 63 Triángulo	93
Figura 64 Trazo de Nigte de triángulos isósceles y escaleno y la descripción de su procedimiento.	104
Figura 65 Trazo de Yamil del triángulo equilátero en GeoGebra.	105
Figura 66 Trazo de Yamil de los triángulos isósceles y escaleno con regla y compás.	105
Figura 67 Palitos de madera utilizado en la Actividad 7.	106
Figura 68 Construcción de triángulos isósceles con los palitos de madera.	107
Figura 69 Trazos de Nigte en la Actividad 8 Ejercicio 5.	109
Figura 70 Trazos de Yamil en la Actividad 8 Ejercicio 5.	111
Figura 71 Trazo de Nigte del triángulo equilátero que incluyen medidas de los ángulos interiores.	122
Figura 72 Trazo de Yamil del triángulo isósceles que incluyen medida de los ángulos interiores.	122
Figura 73 Respuesta de Nigte a la Actividad 3.	123
Figura 74 Respuesta de Yamil a la Actividad 3.	124
Figura 75 Respuesta de Nigte a la Actividad 4.	125
Figura 76 Respuesta de Nigte a la Actividad 5.	126
Figura 77 Rectas paralelas cortadas por una secante.	126
Figura 78 Trabajo de Nigte en la Actividad 5 Inciso 4.	127

Figura 79 Respuestas de Nichte a la Actividad 6 Ejercicio 3 Incisos a) y b).	128
Figura 80 Respuestas de Yamil a la Actividad 6 Ejercicio 3 Incisos a) y b).	130
Figura 81 Explicación de Nichte a Dzan de la Actividad 6 Ejercicio 3 Incisos a) y b).	133
Figura 82 Trabajo realizado por las adolescentes en la Actividad 7	134
Figura 83 Respuestas de Yamil a la Actividad 8.	136
Figura 84 Grupo de respuestas de Nichte a la Actividad 9.	137
Figura 85 Respuestas de Nichte a la Actividad 1 Ejercicio 3 Inciso b).	144
Figura 86 Respuestas de Yamil a la Actividad 1 Ejercicio 3 Inciso a) y b).	144
Figura 87 Segmentos AB, CD y EF.	151
Figura 88 Respuestas de Nichte a la evaluación de la Actividad 5	154
Figura 89 Respuestas de Yamil a la evaluación la Actividad 5.	155
Figura 90 Trabajo de las adolescentes en la Actividad 1.	169
Figura 91 Triángulos	170
Figura 92 Respuestas de Nichte a la Actividad 2 Ejercicio 3.	171
Figura 93 Respuestas de Yamil a la Actividad 2 Ejercicio 2 incisos a) y b).	172
Figura 94 Mapa Conceptual elaborado por Yamil en la Actividad 5.	173
Figura 95 Respuestas de Yamil a la Actividad 5 Ejercicio 2 Inciso a).	174
Figura 96 Respuestas de Yamil a la Actividad 5 Ejercicio 2 Inciso b).	174
Figura 97 Respuestas de Yamil a la Actividad 5 Ejercicio 2 Inciso c), d) y e).	175
Figura 98 Mapa Conceptual elaborado por Nichte en la Actividad 5.	176
Figura 99 Triángulos.	181
Figura 100 Mapa Conceptual elaborado en grupo.	182
Figura 101 Respuestas de Nichte a la Actividad 4 Ejercicio 3.	183
Figura 102 Respuestas de Yamil a la Actividad 4 Ejercicio 3.	184
Figura 103 Respuesta de Nichte a la Actividad 5 Ejercicio 2.	185
Figura 104 Respuesta de Yamil a la Actividad 5 Ejercicio 2.	186
Figura 105 Triángulo.	192
Figura 106 Triángulo.	192
Figura 107 Triángulo semejante.	193

Figura 108 Respuesta de Nichte a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 3.	194
Figura 109 Triángulos.	194
Figura 110 Respuesta de Nichte a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 4.	195
Figura 111 Respuesta de Nichte a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 5.	196
Figura 112 Triángulo.	196
Figura 113 Triángulo.	197
Figura 114 Triángulos semejantes.	197
Figura 115 Respuesta de Yamil a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 3.	198
Figura 116 Triángulo.	199
Figura 117 Respuesta de Yamil a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 4.	199
Figura 118 Respuesta de Yamil a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 5.	200

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Categorías de interferencias e indicadores observables para su análisis e interpretación.	97
Tabla 2 Relación de fases y sesiones impartidas en la intervención didáctica.	101
Tabla 3 Interferencias observadas en la Fase I.	111
Tabla 4 Interferencias observadas en la Fase II.	140
Tabla 5 Medidas de los ángulos interiores de los triángulos de la Actividad 3.	148
Tabla 6 Medidas de los lados de los triángulos de la Actividad 3.	149
Tabla 7 Interferencias observadas en la Fase III.	156
Tabla 8 Respuesta de las adolescentes a la evaluación de la Actividad 5.	163
Tabla 9 Interferencias observadas en la Fase IV Congruencia.	165
Tabla 10 Interferencias observadas en la Fase IV Semejanza.	177
Tabla 11 Interferencias observadas en la Fase IV Razones Trigonómicas	186

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Introducción

El artículo 26 de la Declaración Universal de los Derechos Humanos señala que “toda persona tiene derecho a la educación” (Organización de las Naciones Unidas [ONU], 1948), pues el derecho a la educación es un medio para el ejercicio de otros derechos humanos. La educación favorece la toma de decisiones consciente e informada, la integración en la sociedad y a la vida laboral, influye en el cuidado de la salud personal y el medio ambiente. Sin embargo, en la práctica, el derecho a la educación no siempre se cumple.

De acuerdo con el *Estudio Diagnóstico del Derecho a la Educación 2018* del Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social (CONEVAL), (2018), seis de cada diez jóvenes de entre 15 y 17 años cursan el nivel medio superior (NMS) y, en la transición de la secundaria al NMS, la matrícula disminuye en más de 1.5 millones de estudiantes. La población que se encuentra sobre y por debajo de la línea de pobreza extrema presenta menor asistencia a la escuela. Entre los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), México tiene la tasa de deserción escolar más alta entre los jóvenes de 15 a 18 años: el 52% de estos abandona la escuela por carencias económicas (INEE, 2007).

Esta problemática se incrementa cuando hablamos de poblaciones vulnerables. En México, las niñas, niños y adolescentes (NNA) que viven en casas hogar (CH) constituyen una población vulnerable. Esta población vive alejada de su familia, en muchos casos por orden judicial; proviene de contextos donde la marginalidad y la violencia son altas e interrumpe sus estudios por largo periodos, lo que afecta negativamente su aprendizaje de las matemáticas. A nivel internacional, algunos autores han identificado que la población de NNA que viven en CH presenta un rendimiento académico menor que el de la población general (AIHW, 2018; David y Wise, 2016;

Tordön et al., 2014; Townsend, 2011). En Australia, las diferencias en el rendimiento académico entre la población de NNA que viven en CH y la población general pueden alcanzar un 26% promedio en pruebas estandarizadas (AIHW, 2013). En este sentido, se han estudiado tanto factores de riesgo, como factores de protección. Entre los elementos que ofrecen protección se incluyen aspectos como la presencia de cuidadores comprometidos, el acceso a entornos educativos flexibles y la implementación de intervenciones didácticas efectivas que prioricen las relaciones humanas y promuevan un aprendizaje significativo. (Morgan et al., 2015; Martin y Jackson, 2002; Duke et al., 2017; Gypen et al., 2017; Johnson y Lampley, 2010).

La población de NNA en CH no es insignificante, el *Informe Especial Sobre la situación de los derechos de las niñas, niños y adolescentes que viven en centros de asistencia social y albergues públicos y privados de la República Mexicana* menciona que hay 33,118 individuos en 875 casas hogares, albergues, refugios y otras modalidades de cuidado (CNDH, 2019). Desde la perspectiva de la Matemática Educativa, atender a esta población resulta urgente y necesario, ya que el aprendizaje de las matemáticas no solo proporciona herramientas fundamentales para la vida cotidiana, sino que también puede ser un medio para reducir el riesgo de exclusión educativa y social. Las matemáticas que forman parte integral del currículo escolar desde los primeros niveles educativos, actúan muchas veces como un filtro que condiciona el acceso a niveles educativos posteriores. En este sentido, su enseñanza incluye implícitamente un factor ético cuando nos referimos a contextos de vulnerabilidad.

Esta investigación se inscribe en la necesidad de ampliar el campo de acción de la Matemática Educativa hacia poblaciones vulnerables poco atendidas, contribuyendo no solo al debate académico de la vulnerabilidad en Educación Matemática, sino también al desarrollo de propuestas concretas en condiciones de equidad y contribuir a la construcción de una justicia educativa que no solo apela al acceso a la escuela, sino también a la posibilidad de aprender con sentido. Esta problemática invita a la Matemática Educativa a ser más abierta e incluyente.

1.2 Objetivos y preguntas de investigación

El objetivo general de la presente investigación es diseñar e implementar una intervención didáctica en matemáticas dirigida a adolescentes en situación de vulnerabilidad que viven en casa

hogar, con el propósito de brindar un recurso que facilite su aprendizaje matemático y apoye su inclusión en el sistema educativo. Para alcanzar el objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar las construcciones mentales que las adolescentes hacen de los conceptos seleccionados.
2. Determinar los posibles obstáculos en el aprendizaje de los conceptos seleccionados derivados de la vulnerabilidad de la población de estudio.

Para lograr los objetivos se formularon las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué construcciones acerca de los conceptos matemáticos seleccionados desarrollan las adolescentes de la CH?

¿Qué obstáculos en el aprendizaje de los conceptos matemáticos seleccionados se evidencian en las adolescentes de casas hogar y cómo se relacionan con las condiciones de vulnerabilidad en las que viven?

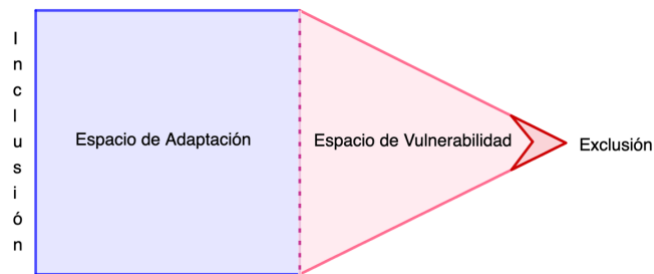
1.3. El concepto de vulnerabilidad en la educación matemática

Se realizó una revisión de literatura (Romero-Hidalgo et al., 2024) enfocada en investigar el concepto de la vulnerabilidad en el campo de la educación matemática y en identificar qué grupos de poblaciones vulnerables se han estudiado y sus características. A partir de la revisión de literatura y la experiencia de uno de los autores en el trabajo con poblaciones vulnerables se propone un modelo inclusión/exclusión que se presenta en la Figura 1. La vulnerabilidad está relacionada con los conceptos de inclusión y exclusión, los cuales se representan como un espacio continuo con cada concepto en un extremo. El espacio se encuentra dividido en dos partes: el espacio de adaptación y el espacio de vulnerabilidad. Cada individuo está en algún lugar de este espacio. En el espacio de adaptación se ubican los individuos aptos para el entorno, es decir, aquellos que pueden responder o reaccionar ante una situación o demanda. En el espacio de vulnerabilidad se encuentran los individuos que tienen el riesgo de exclusión en algún ámbito. La

exclusión representa la ruptura, la separación o el aislamiento. Los excluidos “ya no están”. (Gal et al., 2020; Redmer y Dannath, 2020; Zeuner et al., 2020).

Figura 1

Modelo inclusión/exclusión. Autoría propia.



En cuanto a las circunstancias que determinan la vulnerabilidad, es necesario señalar que la ubicación en el espacio de vulnerabilidad no es inherente a la persona, sino que depende de sus circunstancias de vida o condiciones sociales. Los individuos o grupos de personas que se encuentran en algún riesgo social, político o económico se ubican en el espacio de vulnerabilidad. Ubicarse en el espacio de vulnerabilidad no significa que el destino sea la exclusión. Dos personas con las mismas condiciones que se encuentran en el espacio de vulnerabilidad pueden tener futuros diferentes. Algunos autores se refieren a la vulnerabilidad en términos de los recursos con los que cuenta una persona para hacer frente a una situación de riesgo y resistir circunstancias negativas (Angermeier y Ansen, 2020; Gal et al., 2020; Heilmann, 2020; Nortvedt y Wiese, 2020).

No siempre está claro cuándo una persona está en el espacio de vulnerabilidad. La frontera entre los espacios de adaptación y vulnerabilidad es porosa y la transición de un espacio a otro puede ser desencadenada por algún detalle o situación. La pobreza, la fragilidad y la precariedad son factores que llevan a las personas al espacio de vulnerabilidad. Ser vulnerable o ser parte de una población vulnerable se refiere a la ubicación en el espacio de vulnerabilidad en alguna dimensión: la social o familiar, la financiera, la salud o la educativa (Heilmann, 2020; Prince y Frith, 2020).

1.4 Poblaciones vulnerables estudiadas en la Matemática Educativa

La literatura revisada sobre educación matemática y vulnerabilidad se organiza en torno a cuatro grupos poblacionales: adultos, desplazados, población con discapacidad e indígenas o aborígenes.

En lo que se refiere a la población adulta, una proporción significativa de los artículos revisados aborda a personas adultas en situación de vulnerabilidad. La falta de numeracidad es el tema más estudiado. Gal et al. (2020) advierten que la falta de numeracidad expone a esta población a la exclusión del mercado laboral y de la participación social. Redmer y Dannath (2020) analizan cómo el aumento de las exigencias en las habilidades matemáticas en la sociedad margina a quienes carecen de estas competencias. Otros estudios, como los de Angermeier y Ansen (2020), exploran la relación entre numeracidad y endeudamiento; Schreiber-Barsch (2020) examina la numeracidad en adultos con dificultades de aprendizaje; Reder (2020), en personas en reclusión; y Liu (2020) en relación con la motivación y el empleo en diferentes países.

Respecto a la edad, los estudios son variados. Zeuner et al. (2020) se enfocan en adultos mayores nacidos entre 1926 y 1955; Díez-Palomar (2020) en mujeres de aproximadamente 50 años; y Schreiber-Barsch et al. (2020) incluyen a personas desde los 16 años. Fonseca (2020) analiza a adultos que no tuvieron acceso a la educación básica por razones económicas, quienes al intentar retomar sus estudios en la adultez enfrentan riesgos de exclusión escolar. Este grupo incluye población negra, indígena, trabajadoras domésticas, rurales y mujeres excluidas históricamente de la educación formal.

Con respecto al grupo de la población desplazada que incluye migrantes, refugiados, solicitantes de asilo, inmigrantes y personas privadas de libertad, y cuyo desplazamiento obedece a causas externas como guerras, violencia o persecución. Este grupo está formado por individuos vulnerables en sus países de origen. Jurdak (2020) estudia adultos migrantes de primera generación del Sur Global que enfrentan barreras culturales e idiomáticas en los países de acogida. Nordvedt y Wiese (2020) investigan estudiantes inmigrantes en Noruega, quienes enfrentan interrupciones escolares y carecen de apoyo familiar. Lüssenhop y Kaiser (2020) se centran en refugiados del Medio Oriente en Europa, y Civil et al. (2020) en mujeres inmigrantes que participan en talleres matemáticos. Las personas privadas de libertad también son consideradas desplazadas. Reder

(2020) analiza la numeracidad en adultos jóvenes encarcelados, en su mayoría varones con escasa escolaridad y con un promedio de edad de 37 años.

En cuanto a la población con discapacidad, se comprende a personas con limitaciones físicas, intelectuales, sensoriales o mentales. Schreiber-Barsch et al. (2020) estudian la numeracidad en adultos con discapacidad intelectual o problemas de aprendizaje. Moriña y Orozco (2023) investigan la experiencia docente con estudiantes con discapacidad, promoviendo prácticas inclusivas. Este grupo incluye a personas con dislexia, Asperger, discapacidades visuales, auditivas, motrices o sin diagnóstico formal. Lindenskov y Lindhardt (2020) proponen un proyecto de enseñanza inclusiva que considera la baja motivación, escasa concentración y autoestima como señales de vulnerabilidad matemática.

Por último, la población indígena o aborígen, formada por los individuos de los pueblos originarios de un país. La mayoría de los estudios se centran en Australia y en las islas del estrecho de Torres. Jorgensen (2020) señala las barreras que enfrentan los estudiantes indígenas en zonas remotas, con culturas e idiomas distintos a los de la escuela dominante. Miller et al. (2020) investigan cambios en la participación matemática de docentes y estudiantes aborígenes australianos. En Sudáfrica, Robertson y Graven (2019, 2020) estudian cómo el uso del inglés como idioma oficial en la escuela dificulta el acceso de los estudiantes a la comprensión de conceptos matemáticos. Prince y Firth (2020) abordan la relación entre competencias lingüísticas y numéricas en estudiantes sudafricanos que buscan acceder a la educación superior.

Los grupos no son mutuamente excluyentes. Algunos estudios (Civil et al., 2020; Jurdak, 2020; Nortvedt y Wiese, 2020) analizan a personas que pertenecen simultáneamente a dos grupos, como adultos desplazados. Destaca que en la revisión de literatura no se encontraron estudios sobre la población de NNA que viven en CH.

Con base en el modelo inclusión/exclusión, se reconoce que en la investigación en educación matemática se han realizado estudios con dos diferentes perspectivas: estudios con perspectiva de exclusión que investigan los factores que propician el desplazamiento en dirección al espacio de vulnerabilidad, estos son principalmente la falta de numeracidad y el lenguaje; los estudios con perspectiva de inclusión examinan intervenciones que aminoran la vulnerabilidad y propician la inclusión. La presente investigación pertenece a este segundo grupo.

A partir del análisis de los grupos de poblaciones vulnerables estudiadas en el campo de la educación matemática, es posible argumentar que un estudio centrado en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con adolescentes que residen en casas hogar constituye una contribución original y necesaria a la agenda de la inclusión educativa. Esta aportación se fundamenta en los siguientes argumentos.

Primero, en la revisión de literatura se evidencia que la mayor parte de los estudios sobre vulnerabilidad en educación matemática se centran en adultos con baja numeracidad, personas desplazadas o migrantes, población con discapacidad y pueblos indígenas o aborígenes. No obstante, los adolescentes que viven en casas hogar no aparecen como grupo de estudio en los textos analizados, a pesar de que presentan múltiples condiciones de vulnerabilidad: dificultades económica, antecedentes de abandono, maltrato, rezago académico, discontinuidad educativa y escaso acompañamiento familiar. Este vacío en la literatura justifica la necesidad de investigar sus experiencias de aprendizaje matemático desde un enfoque inclusivo. Además hace visible a una población poco abordada en los estudios de educación matemática.

Al abordar la enseñanza de las matemáticas de la población de adolescentes que vive en casa hogar, se promueve una intervención en una etapa fundamental de la vida que es la adolescencia, lo que contrasta con la mayoría de los estudios que se enfocan en la adultez, etapa en la que las consecuencias de la exclusión ya son evidentes, como es el desempleo o el endeudamiento. La atención temprana en matemáticas puede funcionar como un factor protector que apoye el acceso a la educación media superior, lo que en un futuro se puede traducir en empleo y participación social. Así, este estudio no solo describe la problemática de la población de adolescentes que viven en casa hogar, sino que propone una intervención educativa en una etapa que es formativa.

Estudiar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con adolescentes que viven en casas hogar aporta una perspectiva innovadora y necesaria al campo de la educación matemática inclusiva. Esta población ha sido históricamente invisibilizada en la investigación en educación matemática, por lo que incorporar estos estudios al debate científico representa una oportunidad para abonar elementos a la equidad educativa en matemáticas.

1.4 Conclusión

En este capítulo se ha presentado un problema que enfrenta la Educación Matemática que se refiere a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de poblaciones vulnerables, en particular la población de niños, niñas y adolescentes que viven en casas hogar ha recibido poca atención. Por ello, este capítulo inicia con una introducción al planteamiento del problema, después en la sección 1.2 se establecen los objetivos y las preguntas de investigación que guían este trabajo. En la sección 1.3 se presenta el modelo inclusión-exclusión que es útil para comprender el concepto de vulnerabilidad en nuestro campo de estudio.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Introducción

Este proyecto de investigación se desarrolla en dos áreas: una centrada en la vulnerabilidad, y la otra en el proceso de construcción de conocimiento matemático. Se busca establecer un vínculo entre ambas al argumentar que, para construir conocimientos, es esencial crear un entorno que considere el afecto como un pilar esencial. En este sentido, el diseño didáctico y el análisis de los resultados de esta investigación se fundamentan en los principios de la Pedagogía Inclusiva, incorporando las ideas de Piaget sobre cognición y afecto, y utilizando la teoría APOE como marco conceptual. Con la Pedagogía Inclusiva, mantenemos siempre en perspectiva el trabajo con una población vulnerable que se encuentra en riesgo de exclusión. Por su parte, la teoría APOE considera la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de manera integral, ofreciendo herramientas tanto para la implementación como para su análisis. La propuesta destaca la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como una herramienta vital para la inclusión social y académica y se define en la integración de aspectos afectivos y cognitivos, en un espacio que se denomina “Espacio de Condiciones de Posibilidad” (ECP), que se refiere a las condiciones necesarias para que sea posible la construcción de conocimiento en la población de estudio.

2.2. La teoría APOE

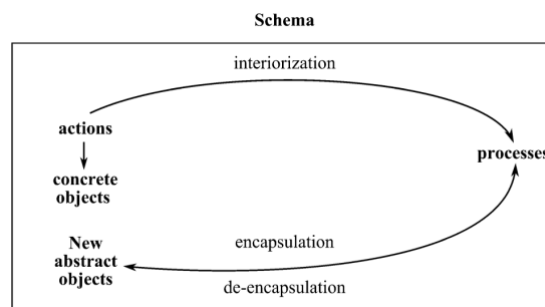
APOE es un marco teórico que explica cómo se construye la comprensión de conceptos matemáticos, se basa en la **abstracción reflexiva** de Piaget y propone cinco **mecanismos mentales**: interiorización, coordinación, reversibilidad, encapsulación y generalización. Estos mecanismos conducen a la construcción de **estructuras mentales**: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.

Las Acciones representan la forma más primitiva de concebir un concepto matemático, consisten en la transformación externa de objetos. La repetición de Acciones y la reflexión en ellas son la base para el desarrollo de otras estructuras. Cuando una Acción se interioriza, se convierte en Proceso, cuya característica es la realización mental de acciones y su reversibilidad. Los Procesos se pueden coordinar dando lugar a nuevos Procesos. Cuando se adquiere conciencia del Proceso como una totalidad y se le aplican transformaciones (ya sea explícita o mentalmente), se dice que el individuo ha encapsulado el Proceso en un Objeto (Figura 2). La encapsulación es la estructura mental más difícil de lograr. Las conexiones entre las estructuras mentales forman la base de un Esquema cuya coherencia da sentido a la situación relacionada con un concepto. Los Esquemas se caracterizan por su dinamismo y su continua reconstrucción. Un Esquema se transforma en una estructura estática que puede ser usada para asimilar otros Objetos y Esquemas.

La comprensión de un concepto depende de la habilidad de un individuo para establecer conexiones entre las estructuras mentales que lo constituyen.

Figura 2

Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático en estudiantes de educación básica. (Arnon et al., 2014, p. 154).



La principal herramienta para describir como se construye el conocimiento matemático en la teoría APOE es la Descomposición Genética (DG). De acuerdo con Arnon et al. (2014), la DG es un modelo hipotético que describe los mecanismos y las estructuras mentales que un individuo necesita construir para aprender un concepto; asimismo, explica las expectativas de actuación de los estudiantes. Se basa en la experiencia del investigador, en estudios anteriores del concepto y en la observación de los estudiantes en el aprendizaje. Puede orientar el diseño instruccional y

proporcionar información sobre el aprendizaje de los alumnos. La DG no es única y, cuando se verifica empíricamente, puede ser un modelo de cognición. Su aplicación permite la descripción de la construcción de los conceptos en cuestión (Roa-Fuentes y Oktac, 2010).

La teoría APOE propone un ciclo de investigación que incluye tres elementos fundamentales: el análisis teórico, el diseño e implementación de la enseñanza, y la recolección y el análisis de los datos. La DG responde al análisis teórico y orienta el diseño de las actividades. Por otro lado, APOE ofrece un ciclo de enseñanza denominado el ciclo ACE, acrónimo de Actividades, discusión en Clase y Ejercicios. Este ciclo inicia con actividades que se planean de forma colaborativa con el propósito de promover la abstracción reflexiva; después, se realiza una discusión en clase guiada por el docente. En esta etapa, el docente puede proporcionar explicaciones y definiciones. Finalmente, se realizan ejercicios tanto en las sesiones como fuera de ellas. En esta investigación muchos de estos ejercicios se basan en preguntas estándar relacionadas con las guías de estudio del examen de ingreso al bachillerato COMIPEMS, los cuales apoyan las construcciones propuestas en la DG, la aplicación de lo aprendido y la vinculación entre conceptos.

La relación entre los elementos del ciclo de investigación y del ciclo ACE de enseñanza se ilustran en el Figura 3. En ella se puede observar que la DG ocupa una posición central en el ciclo de investigación e impacta tanto el diseño como la implementación de la enseñanza, que está vinculada con el ciclo ACE.

Fig. 3

Relación de los componentes del ciclo de investigación y enseñanza de APOE. (Adaptación propia de Asiala et al., 1996)



APOE se ha aplicado principalmente en investigación en nivel medio superior y superior, y cuenta con escasa aplicación en el nivel básico. Es a partir de la teoría APOE que se operacionaliza la Pedagogía Inclusiva que se presenta a continuación.

2.3. La Pedagogía Inclusiva

La pedagogía inclusiva (PI), sustentada en documentos internacionales como la declaración de Salamanca (UNESCO, 1994) y la Convención de las Naciones Unidas sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (ONU, 2006), afirma que todas las personas tienen el derecho de recibir una educación de calidad en un ambiente de respeto e inclusión. La PI se ha definido como un enfoque pedagógico orientado a la enseñanza y el aprendizaje que busca garantizar la participación de todos los estudiantes, ofreciendo igualdad de oportunidades (Ainscow et al., 2006; Messiou, 2017; Slee, 2018). En este enfoque se reconoce la diferencia entre los estudiantes y se abre la posibilidad de que aprendan en condiciones adecuadas (Florian, 2015). La PI valora la diversidad como una oportunidad para enriquecer el proceso educativo (Shields, 2000) y contribuye a la construcción de una sociedad equitativa e inclusiva.

La operacionalización de la PI desde la teoría APOE está estrechamente ligada con la práctica docente. De acuerdo con Moriña (2020), comprende cuatro dimensiones: creencias, conocimiento, diseño y acción. A esto se añade una quinta dimensión, que es el componente afectivo dada su relevancia en la enseñanza en contextos vulnerables. Las creencias se relacionan con la valoración de cada uno de los estudiantes y el reconocimiento de la diversidad como un elemento enriquecedor del aprendizaje (Shields, 2000). Diversas investigaciones indican que el éxito de la inclusión depende en gran parte de la actitud positiva de las docentes (Van Houtte y Demandet, 2016). El conocimiento docente que es esencial para llevar a cabo una enseñanza inclusiva y se fortalece desde la teoría APOE al comprender como se desarrollan las estructuras mentales planteadas en la DG, lo que permite a los docentes anticipar posibles obstáculos cognitivos y generar estrategias adecuadas para su grupo de estudiantes. No es suficiente que un docente cuente con una sólida base de conocimientos; es igualmente importante que esté familiarizado con diversas estrategias de enseñanza, que comprenda la construcción del

conocimiento y las necesidades de los estudiantes, y que sea capaz de identificar y valorar las dificultades que estos podrían encontrar en su proceso educativo (Rouse, 2009). Las acciones, entendida dentro de la PI como la implementación de prácticas inclusivas, se concretan en la realización de actividades diseñadas a partir de la DG y deben sustentarse en la flexibilidad y en un aprendizaje centrado en el estudiante, con docentes comprometidos y compartidos (Aguirre et al., 2020; Melero et al., 2020).

La implementación de las actividades se inscribe en el ciclo ACE, que propone que los alumnos trabajen de manera colaborativa. No obstante, es probable que la población de este estudio no haya tenido la oportunidad de desarrollar un sentido de pertenencia, que no haya aprendido a confiar en los demás, ni a considerar las opiniones de sus compañeros, tampoco a sentir que su voz será respetada y escuchada. Esta circunstancia complica el ejercicio de la colaboración, especialmente cuando la experiencia ha estado caracterizada por la falta de apoyo y cuidado por parte de quienes debieron haber estado presentes para ayudarles. En este contexto, la operacionalización de la PI se traduce en adaptaciones al ciclo ACE, como es la sustitución del trabajo colaborativo por un esquema combinado de trabajo individual con recapitulación colectiva, respetando las dificultades que enfrentan las adolescentes para establecer relaciones de confianza y asegurando la igualdad de participación. Considerando los principios de la Pedagogía Inclusiva, en el entorno se respeta que las adolescentes se resistan a la colaboración, lo cual se entiende como un reconocimiento a sus diferencias y como una oportunidad para crear condiciones adecuadas para cada una.

En el diseño pedagógico es importante reconocer las diferencias y responder a ellas (Gale y Mills, 2013). Esto significa que el docente debe atender las necesidades de todos los estudiantes, asegurando su accesibilidad y debe evitar ajustes improvisados en el proceso de enseñanza (Sandoval et al., 2020). En el caso de poblaciones vulnerables, como son las adolescentes que viven en casa hogar, es fundamental partir de lo más básico, ya que aunque esta población suelen poseer documentos oficiales que validan un nivel educativo, en la realidad carecen de los conocimientos que estos documentos acreditan. La teoría APOE permite diseñar actividades graduadas de acuerdo con los conocimientos previos de las estudiantes, asegurando su participación y un aprendizaje que considere la diversidad y el ritmo individual.

Finalmente, el componente afectivo es clave en la enseñanza inclusiva en contextos de vulnerabilidad. De acuerdo con Moriña (2020), este elemento está relacionado con la manera en que se lleva a cabo la enseñanza. En el presente trabajo, se integra mediante la creación de un entorno de seguridad y afecto positivo, donde las estudiantes sepan que sus preguntas serán escuchadas, valoradas y respetadas. En este sentido, la docente promueve la discusión en las sesiones y considera las ideas de las adolescentes, por incipientes que sean. Esto facilita que, junto a ellas, se construyan las Acciones, Procesos y Objetos planteados en la DG, lo que favorece la participación de las adolescentes y garantiza igualdad de oportunidades. Esta dinámica se repite en todas las actividades, creando un entorno donde las adolescentes desarrollan seguridad en sí mismas. Así, se refuerza la confianza y la autoestima, al mismo tiempo que avanza su aprendizaje matemático, evidenciando que la inclusión no es solo un principio ético, sino una condición necesaria para el aprendizaje. Por último, la pedagogía inclusiva también influye en la metodología de investigación, al impulsar métodos cualitativos como es el estudio de caso y la implementación de prácticas inclusivas (Booth y Ainscow, 2011).

2.4. Espacio de Condiciones de Posibilidad

La relación entre afectividad y cognición ha sido objeto de estudio por diversos autores. Piaget, ampliamente reconocido por sus estudios sobre el desarrollo cognitivo, también aborda la relevancia del afecto en la formación del ser humano (Piaget, 2005). No solo reconoce su importancia, sino que estudia con detenimiento las contribuciones en este campo. Aunque Piaget no recopila datos empíricos sobre el desarrollo afectivo, aborda el tema desde un enfoque teórico y sostiene que “el afecto es mucho más que un problema de conocimiento... Sin afecto no habrá interés, necesidad, motivación y como consecuencia... no habrá inteligencia” (Piaget, 1962). De acuerdo con Piaget (1954), la afectividad es una condición necesaria para la actividad cognitiva. Este autor sostiene que la afectividad actúa como el motor que proporciona la energía y la motivación necesarias para la realización de actividades cognitivas, mientras que la inteligencia se encarga de organizar y estructurar dichas actividades. La estructura afectiva es isomórfica con la estructura cognitiva (Piaget, 1981). Desde esta perspectiva, el afecto no solo acompaña al pensamiento matemático, sino que lo posibilita y sostiene.

De manera análoga Pérez (2017) subraya la necesidad de reconocer la interacción entre la afectividad y la cognición en el ámbito educativo. Un entorno que favorezca el desarrollo emocional como el intelectual contribuye a un aprendizaje más integral y efectivo para los estudiantes. Pierre Janet (1925), por su parte, define la afectividad como un fenómeno que puede alterar el desarrollo intelectual, ya sea acelerándolo o frenándolo. En este sentido, Piaget afirma que el afecto regula las intenciones de acercarse o alejarse de la actividad cognitiva, y proporciona un ejemplo relacionado con las operaciones matemáticas: "...los sentimientos de éxito o fracaso pueden facilitar o inhibir el aprendizaje de las matemáticas, pero la estructura de las operaciones matemáticas no será modificada" (Piaget, 1981). La descripción de la experiencia emocional de Piaget presenta un paralelismo con las ideas de Mandler (1989), quien explica cómo las personas toman conciencia de su éxito o fracaso al completar una secuencia de acciones. Este enfoque guarda relación con los constructos de la teoría APOE.

La adolescencia es una etapa crucial en la construcción de la identidad personal, profesional, laboral y social. Covarrubias (2002) destaca la relevancia de la familia en este proceso. Según Pérez (2017), los estudiantes que enfrentan problemas en el hogar tienden a mostrarse rebeldes en la escuela, lo que constituye una barrera cognitiva y dificulta la formación de esquemas de aprendizaje. Aunque la adolescencia es, como ya mencionó, una etapa clave en la formación del individuo, en situaciones de vulnerabilidad es fundamental explorar qué condiciones pueden ayudar a las adolescentes que viven en casa hogar a encarar los desafíos que enfrentan.

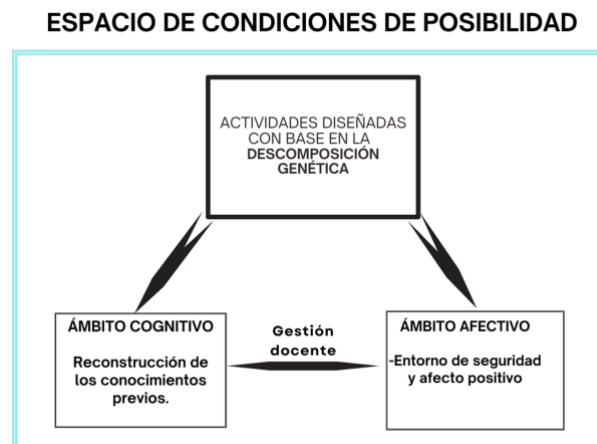
De acuerdo con lo anterior, las estrategias educativas que integran la afectividad y la cognición contribuyen a la creación de entornos de aprendizaje inclusivos. Alineado con las ideas de Piaget sobre la interdependencia entre afectividad y cognición, este trabajo presenta una intervención didáctica dirigida a niñas y adolescentes en situación de vulnerabilidad que residen en una casa hogar. La propuesta destaca la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como una herramienta vital para la inclusión social y académica. La propuesta se define en la integración de aspectos afectivos y cognitivos, en un espacio que se denomina "Espacio de Condiciones de Posibilidad" (ECP), que se refiere a las condiciones necesarias para que sea posible la construcción de conocimiento en la población de estudio. En el ámbito cognitivo, se debe asegurar que se hayan

construido los conocimientos previos declarados en la DG. Por otra parte, el ámbito afectivo se centra en la creación de un entorno de seguridad y de afecto positivo, que sea sensible a las condiciones de vulnerabilidad y a las necesidades específicas de la población de estudio. Esto permitirá fortalecer su seguridad y confianza, facilitando así su participación en el proceso de aprendizaje.

En el ECP, la gestión docente funge como un puente de conexión entre el ámbito cognitivo y el afectivo, como se representa en la Figura 4. La gestión docente involucra las decisiones que toman los docentes en su práctica, las cuales, están vinculadas con sus conocimientos, valores y creencias, entre otros factores (Moriña 2020; Florian, 2014).

Figura 4

Espacio de Condiciones de Posibilidad sustentado sobre elementos cognitivos y afectivos.



Al atender el ECP, se favorece la eliminación de las barreras que obstruyen el aprendizaje de la población de estudio, con lo que se espera que las adolescentes no solo avancen en su instrucción, sino que también desarrollen herramientas emocionales y cognitivas que faciliten su inclusión académica y social, lo cual es esencial para diseñar estrategias educativas efectivas. La integración de estos dos elementos dentro de un marco de pedagogía inclusiva no solo promueve la creación de entornos de aprendizaje más accesibles y equitativos, sino que también asegura que estudiantes en situación de vulnerabilidad puedan participar plenamente en su desarrollo académico y social.

2.5. Conclusión

En este capítulo se presentó el marco teórico que fundamenta la intervención propuesta para las adolescentes que viven en casa hogar. El marco teórico considera la afectividad y la cognición. De acuerdo con Piaget, no hay procesos cognitivos sin elementos afectivos, lo que subraya la importancia de considerar ambos aspectos para garantizar una educación inclusiva.

La teoría APOE es un marco teórico fundamental en la educación matemática, basado en la abstracción reflexiva de Piaget. Esta teoría aborda las estructuras y mecanismos mentales, esenciales para la construcción de conceptos matemáticos en las estudiantes. La Descomposición Genética es un modelo útil para describir el aprendizaje de conceptos. Por otro lado, la Pedagogía Inclusiva, promueve la educación equitativa y de calidad para todos, valorando la diversidad como una oportunidad de aprendizaje. La implementación de actividades diseñadas con la teoría APOE y la creación de un entorno seguro y afectivo, enmarcada en el Espacio de Condiciones de Posibilidad son clave para el éxito de la intervención propuesta.

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

3.1. Introducción

La vulnerabilidad, eje fundamental de esta investigación, tiene un referente en la propuesta metodológica. De esta manera, el análisis se realiza mediante un estudio de caso (sección 3.2) y se enfoca en dos aspectos: por un lado, la exploración de la construcción del conocimiento matemático a través del marco teórico de APOE, y por otro, la investigación de los elementos contextuales que podrían incidir en el aprendizaje de las matemáticas y en el desarrollo de las sesiones. Este capítulo presenta el perfil de la población y la selección de casos en la sección 3.3. En la siguiente sección 3.4 titulada “Diseño” se aborda lo referente a la metodología de APOE que incluye la descomposición genética (DG) y el diseño de las actividades, y por último, en la sesión 3.5 se aborda la recolección y el análisis de los datos.

3.2. Estudio de caso

De acuerdo con Yin (2018) un estudio de caso es “método empírico que investiga un fenómeno contemporáneo (el caso) en profundidad, en su contexto real, especialmente cuando las fronteras entre el fenómeno y el contexto no son muy claras”. Codina Lluís (2023) afirma que se requiere la comprensión de un caso real y se asume que tal comprensión involucra condiciones pertinentes al caso. El estudio de caso (EC) se define como un enfoque de investigación cualitativo que indaga un caso o varios casos dentro de un contexto específico, recopilando información de diversas fuentes como observaciones, entrevistas, documentos y reportes, entre otros (Stake, 1999). Se reporta la descripción del caso a partir de diferentes temas.

Los tipos de estudio de caso varían principalmente en función del tamaño de la población de investiga. Se identifican el EC individual instrumental, el EC múltiple y el EC intrínseco. De acuerdo con Stake (2005) en el EC individual instrumental, el investigador se concentra en una

situación particular y elige un caso que la represente. En el EC múltiple, se seleccionan varios casos para ilustrar la situación, lo que permite obtener diversas perspectivas sobre el tema. Para que este enfoque sea pertinente, es importante que los casos sean representativos de la población en estudio. Finalmente, el EC intrínseco se enfoca en problemas inusuales o únicos de una situación particular. Este enfoque es especialmente adecuado para esta investigación, que aborda el problema del aprendizaje de las matemáticas en un contexto cerrado, específicamente en la población de adolescentes que viven en casas hogar. Se elige un EC múltiple comparativo, enfocado en dos casos que ofrecen diferentes perspectivas sobre el problema (Creswell, 2005). Como se explicará más adelante, se recopilaban datos de diversas fuentes, los cuales ayudarán a ofrecer una descripción detallada del caso. También se plantea un análisis holístico del caso, que apoye la comprensión profunda y compleja de la situación.

3.3. Perfil de la población

Las NNA en situación de vulnerabilidad se constituyen como titulares de derecho y es el Estado el responsable de protegerlas y restituir sus derechos. Esta población ha sido desprovista de sus derechos de protección o no cuenta con cuidados parentales. El Estado, como garante de su vida e integridad física, las coloca en resguardo en una CH, donde permanecen hasta tener un entorno familiar estable y de bienestar para el regreso a su hogar, en caso de contar con este. En la restitución de derechos, el acceso a la educación se contempla como factor protector para el desarrollo de habilidades para la vida. Como se señaló anteriormente, este trabajo plantea una intervención didáctica en matemáticas con adolescentes que viven en CH y que presentarán el examen de ingreso al nivel medio superior. Ya que el trabajo con adolescentes de contextos vulnerables se favorece cuando se trabaja con grupos reducidos, la población de estudio son dos adolescentes.

La casa hogar donde se llevaron a cabo las sesiones es una institución de asistencia privada para niñas y adolescentes. Es un espacio digno, constituido por un jardín amplio rodeado por un salón de usos múltiples, cocina y comedor, dormitorios con baño y espacios de oficinas. Las niñas y adolescentes se dividen en tres dormitorios, por grupo etario. La casa hogar cuenta con personal operativo: directora, administradora, pedagogas, cocinero, personal de intendencia y chofer. Las actividades de la población son dirigidas por un grupo de pedagogas, cuya labor es garantizar que

cada persona cumpla con las tareas escolares y domésticas que le corresponden y que todas las actividades se completen en tiempo y forma. Algunas actividades son innegociables, entre ellas están las horas de los alimentos, las tareas escolares, la hora de la colación o el turno de lavar los manteles del comedor. La casa hogar cuenta con personal que diseña y prepara el menú de la comida. Los alimentos que se ingieren, especialmente la cantidad de azúcar, están estrictamente controlados para las niñas y adolescentes, debido a que la mayoría recibe atención psicológica y toma medicamentos controlados, los cuales son incompatible con el consumo elevado de azúcar. De acuerdo con la directora de la casa hogar, la población de niñas y adolescentes que ahí vive tiene por lo general muy baja autoestima.

Para el estudio de caso se seleccionaron dos adolescentes como representantes de esta población. Sin embargo, es necesario acotar la presencia de otras adolescentes con diferentes rasgos (en los que no es necesario ahondar para los fines de esta investigación), que también viven en la casa hogar, que no pertenecen al grupo de estudio y que ocasionalmente participan en las sesiones. Las niñas o adolescentes que viven en CH comparten características comunes, como es vivir lejos de su familia (en caso de tenerla) y gran fragilidad emocional. Todos los conflictos inherentes a la adolescencia se exacerban en el entorno de una CH. La población de estudio de esta investigación se agrupa según su trayectoria de vida y su trayectoria escolar:

- Adolescentes que cursan su nivel educativo asistiendo de manera presencial a la escuela o las que certifican un nivel educativo a través de cursos en línea o mediante la presentación de exámenes.
- Adolescentes que no conocieron a sus padres o sí los conocen.
- Adolescentes que ingresan a la casa hogar desde los primeros años de vida o aquellas que ingresan más grandes.

La población de estudio está formada por dos adolescentes, Nicté y Yamil (cuyos nombres han sido cambiados para proteger su identidad). A continuación, se describen las características de cada una.

CASO 1

Nicte tiene 15 años cumplidos, no tiene familia y no conoció a sus progenitores, vive en casa hogar desde el tercer año de vida. En el ámbito educativo, ha asistido a colegios particulares que ofrecen plazas sin costo para niñas o adolescentes de casas hogar. Sin embargo, fue expulsada de una escuela particular por hurto, lo que la llevó a ingresar a una escuela pública, la cual también tuvo que abandonar por problemas. No asiste a la escuela de manera presencial y certificó la secundaria en el INEA. A Nicte le cuesta trabajo integrarse socialmente y no sabe trabajar de manera colaborativa. Muestra una gran rivalidad con sus compañeras. En su biografía matemática, menciona que las matemáticas le resultan complicadas, aunque lo intenta. Desde la primaria no las entendía y no le gustaban por la forma en que se las enseñaban. Ha tenido que luchar contra esta dificultad y le resulta difícil. No se siente capaz, pero está dispuesta a intentarlo.

CASO 2

Yamil tiene 14 años, creció en una familia que perdió su patria potestad porque violentó su derecho de protección. Antes de llegar a la casa hogar, Yamil pasó más de dos años sin asistir a la escuela. Cursó tercer grado en una escuela secundaria técnica vespertina de la Ciudad de México. Tiene contacto esporádico con su madre y lleva 15 meses viviendo en la casa hogar. En su biografía matemática menciona que en su casa la ponían a estudiar, pero muy poco, y no se le quedaban grabadas las cosas. En matemáticas no se ha llegado a desesperar, se siente capaz de entender si le explican bien.

Ambas tienen la intención de presentar el examen de ingreso al nivel medio superior.

3.4. Diseño

Como se mencionó el interés principal de la teoría APOE es la descripción de la construcción del conocimiento, esto se apoya en la Descomposición Genética. A continuación, se presenta la DG diseñada para la intervención didáctica propuesta.

3.4.1. El caso del triángulo

El programa de estudios de Matemáticas de la Secretaría de Educación Pública (SEP) establece que, al concluir la educación básica, los estudiantes deben dominar los contenidos relativos a la geometría, particularmente en el eje de Forma, Espacio y Medida. Aunque el concepto de triángulo se introduce en los primeros años de la educación básica, muchos estudiantes no construyen una noción suficientemente precisa para resolver problemas de razones trigonométricas que se abordan en el último año de secundaria. Por ejemplo, por lo general identifican un triángulo como una figura de tres lados, pero no comprenden que es una figura cerrada, con tres ángulos interiores cuya suma es siempre 180° . Frecuentemente confunden triángulos rectángulos con triángulos escalenos y, si recuerdan el teorema de Pitágoras, lo aplican a cualquier triángulo y no lo usan para resolver problemas. Estos conocimientos son esenciales para el estudio de la semejanza de triángulos y las razones trigonométricas.

Para apoyar el aprendizaje de las razones trigonométricas, se diseñó una Descomposición Genética (DG) titulada “El triángulo y sus propiedades”, que propone una posible vía para la construcción de los elementos necesarios para el aprendizaje de las razones trigonométricas. La DG propuesta en este trabajo considera la condición de vulnerabilidad de la población de estudio, ya que, de acuerdo con Piaget y García (2008) la evolución de cualquier conocimiento no está relacionada con el incremento de conocimientos, sino con la reinterpretación de los conceptos previos o con la reconstrucción de lo que fue construido con anterioridad. “Se trata de una reorganización de los conocimientos, a la luz de nuevos puntos de vista, y de una *reinterpretación* de los conceptos de base” (Piaget y García, 2008, p. 107). Las sesiones de trabajo incluyeron el estudio de fracciones, divisibilidad y variación proporcional, conceptos indispensables para la construcción de las razones trigonométricas pero cuyo tratamiento y análisis no se contemplan en el presente estudio.

3.4.2. La Descomposición Genética: “El triángulo y sus propiedades”

Construcciones previas

Punto - Objeto

Segmento - Objeto; longitud - Objeto

Ángulo - Objeto

Circunferencia - Objeto (punto, radio, centro)

Construcción:

Acción sobre segmentos para construir diferentes figuras de tres lados. Esta acción se interioriza en el proceso de construcción de cualquier figura de tres lados. Acción de comparar figuras de tres lados para reconocer aquellas que son cerradas. Esta Acción se interioriza en el Proceso correspondiente cuando se evidencia que los alumnos pueden determinar si, dada cualquier figura de tres lados, ésta se trata o no de un triángulo y pueden clasificar los triángulos en términos de la longitud de sus lados. Acciones de comparación de la longitud de los lados de un triángulo se interiorizan en un Proceso cuando los alumnos pueden establecer la relación entre las longitudes, este Proceso se evidencia cuando los alumnos reconocen la relación entre las longitudes de los lados de cualquier triángulo y la llaman por su nombre. Este Proceso se coordina con el Proceso que se obtiene de desencapsular el Objeto ángulo en el Proceso que permite determinar diferencias entre triángulos en relación con sus ángulos internos. Se realizan Acciones de medición y suma de los ángulos interiores de diferentes triángulos, estas se interiorizan en el Proceso de reconocer que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es siempre 180° . Este Proceso se encapsula en el Objeto triángulo cuando se pueden aplicar Acciones y Procesos sobre estas figuras para determinar elementos desconocidos a partir de información parcial.

Acciones de comparación de la suma de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo con el cuadrado de la hipotenusa. Estas Acciones se interiorizan en un Proceso en el cual, independientemente del tamaño y de la posición de distintos triángulos rectángulos, la alumna puede determinar que el cuadrado de la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma del cuadrado de sus catetos. La reversión del Proceso anterior permite el reconocimiento de la igualdad $a^2+b^2=c^2$ en el caso de triángulos rectángulos, para reconocer que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Este Proceso se encapsula como Objeto en la relación que se conoce como teorema de Pitágoras cuando las alumnas pueden utilizar este teorema para hacer Acciones que les permitan resolver problemas relacionados con triángulos rectángulos.

Acciones de comparación de diferentes triángulos en términos de las diferencias y similitudes de sus ángulos y sus lados. Estas Acciones se interiorizan en el Proceso que permite determinar, entre cualquier pareja de triángulos, aquellos que tienen todos los lados y ángulos

iguales. Este Proceso se encapsula en un objeto cuando la alumna puede realizar acciones de comparación de triángulos y determinar si los triángulos son congruentes o no.

Acciones de comparación de triángulos en términos de sus ángulos internos y de las razones entre los lados correspondientes para determinar si estos son proporcionales. Estas Acciones interiorizan en un Proceso que permite determinar, entre distintas parejas de triángulos, cuáles satisfacen la propiedad anterior. La Acción de comparar las razones entre lados correspondientes de dos triángulos y de determinar si los ángulos correspondientes de los triángulos son iguales se interioriza en el Proceso que permite identificar entre parejas arbitrarias de triángulos aquellos que tienen ángulos correspondientes iguales. Los dos Procesos anteriores se coordinan en el Proceso que permite reconocer que, cuando ambas propiedades se cumplen (es decir, que los ángulos correspondientes de los triángulos son iguales y sus lados proporcionales) dichos triángulos son semejantes. Este Proceso se encapsula en el Objeto triángulo semejante cuando las alumnas pueden comparar distintos triángulos y diferenciar entre triángulos congruentes y triángulos semejantes.

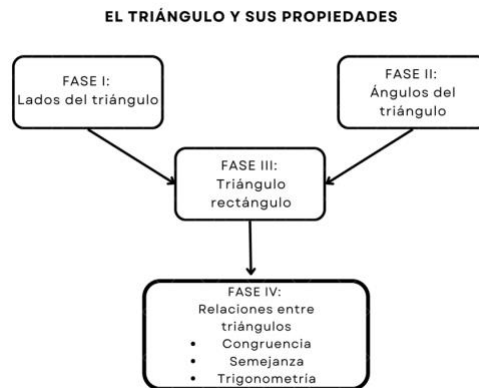
Se desencapsula el Objeto triángulo Semejante en el Proceso que le dio origen y se coordina con el Proceso de triángulo rectángulo, en un nuevo Proceso que relaciona las razones entre lados proporcionales de un triángulo en referencia con uno de sus ángulos agudos. Este Proceso se encapsula en el Objeto razón trigonométrica cuando la alumna reconoce las distintas razones por su nombre y puede hacer Acciones para resolver problemas de valores desconocidos de un triángulo.

3.4.3 Análisis de las actividades

Para la intervención didáctica se diseñaron actividades con base en la Descomposición Genética. Las actividades se organizaron en cuatro fases cuya relación se presenta en la Figura 5. En las primeras tres fases, se trabajan conceptos relacionados con los lados del triángulo, los ángulos del triángulo y el triángulo rectángulo, que sirven como base para poder construir la última fase enfocada en las relaciones entre triángulos, que incluye la congruencia, la semejanza y las razones trigonométricas.

Figura 5

Fases que integran la Descomposición Genética “El triángulo y sus propiedades”.



A continuación se presentan las actividades agrupadas por fase y el análisis de las estructuras y mecanismos mentales que se planea construir en cada actividad.

FASE I

Actividad 1

Cuestionario sobre las construcciones previas

- a) ¿Cuál es la diferencia entre un segmento y una recta?
- b) ¿Qué son rectas paralelas?
- c) ¿Qué son rectas perpendiculares?
- d) ¿Qué es un triángulo?
- e) ¿Cuál es la característica de un triángulo isósceles?
- f) ¿Qué es un triángulo rectángulo?

Análisis

Este cuestionario tiene como objetivo evaluar las construcciones previas necesarias para la construcción del triángulo y sus propiedades tomando como base los conceptos de segmento y ángulo. En esta primera evaluación, se examina específicamente la comprensión del concepto de

segmento, ya que es fundamental para realizar las acciones iniciales, como el trazado de triángulos. También se exploran las construcciones que los estudiantes han desarrollado sobre el triángulo y sus propiedades. Se espera que los estudiantes reconozcan al triángulo como una figura geométrica con tres lados, tres vértices y tres ángulos interiores. Además, deben haber construido el segmento de recta como objeto, saber cómo trazarlo, medir su longitud y diferenciarlo de una línea recta. También es necesario que los estudiantes hayan construido los conceptos de rectas paralelas y rectas perpendiculares.

Actividad 2

Trabaja en GeoGebra. Realiza las siguientes actividades y responde las preguntas:

- a) Traza un segmento de recta que pase por dos puntos.
- b) Mide la longitud del segmento de recta.
- c) Repite la operación y traza tres segmentos diferentes de recta y mide la longitud de cada uno.
- d) ¿Pueden dos segmentos compartir un extremo? Traza un ejemplo.
- e) Traza una recta que pase por dos puntos.
- f) ¿Puedes medir la longitud de la recta?
- g) Explica tu respuesta.
- h) Escribe la diferencia entre segmento de recta y una recta.

Análisis

La construcción del triángulo y sus propiedades parten del Objeto segmento. Se desencapsula el Objeto segmento en los elementos que le dieron origen y se realizan Acciones de trazo y medición de segmentos, comparación de segmentos, trazo de rectas y análisis de las diferencias y semejanzas entre rectas y segmentos. Las Acciones de trazo y medición de diferentes segmentos, así como la reflexión sobre sus diferentes longitudes y las diferencias con las líneas rectas promueve la interiorización de la diferencia entre segmento y recta como un Proceso.

Actividad 3

1. Traza una recta cualquiera $\mathcal{L}_1$ y un punto fuera de ella $\wp_1$.
 - a) Localiza el comando  Recta paralela y utilízalo para trazar una recta paralela a la recta que trazaste originalmente, que pase por el punto marcado.
 - b) Marca dos puntos más en el plano diferentes a $\wp_1$ y llámalos $\wp_2$ y $\wp_3$. Repite la acción con estos puntos y traza rectas paralelas a la recta $\mathcal{L}_1$.
 - c) Describe la relación entre la recta $\mathcal{L}_1$ y las rectas que trazaste.
 - d) ¿Se cruzan estas rectas en algún punto?
2. Traza una recta cualquiera $\mathcal{L}_1$ y un punto fuera de ella $\wp_1$.
 - e) Localiza el comando  Recta perpendicular y utilízalo para trazar una recta perpendicular a $\mathcal{L}_1$ que pase por el punto $\wp_1$.
 - f) Marca dos puntos $\wp_2$ y $\wp_3$ en el plano diferentes a $\wp_1$. Traza rectas perpendiculares a $\mathcal{L}_1$ que pasen por los puntos $\wp_2$ y $\wp_3$.
 - g) Describe la relación entre la recta original y las rectas que trazaste.
 - h) ¿Es suficiente decir que dos rectas perpendiculares son aquellas que se cruzan?
 - i) Traza dos rectas que se crucen que no sean perpendiculares.

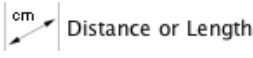
Análisis

Se realizan Acciones de trazo de rectas paralelas y perpendiculares a una recta dada, que pasan por diferentes puntos. La observación de semejanzas y diferencias entre las rectas y la verbalización de sus características promueve la interiorización del Proceso de rectas paralelas y rectas perpendiculares.

Actividad 4

Trazo de triángulos equiláteros.

- a) En una hoja de GeoGebra.

- Traza un triángulo que tenga tres lados que midan 5 unidades. Describe el procedimiento que utilizaste.
 - Utiliza la tecla  para comprobar que el triángulo es equilátero. ¿Fue preciso el procedimiento que utilizaste?
- b) Continúa trabajando en GeoGebra.
- Explora cómo trazar un triángulo equilátero con el comando “Polígono regular”



y traza un triángulo cuyos lados también midan 5 unidades.

- c) Toma una hoja de papel, regla y compás y realiza los siguientes trazos.
- Traza un segmento AB de 5 cm de longitud.
 - Traza una circunferencia que tenga centro en el punto A y radio igual a la longitud de AB.
 - Traza una segunda circunferencia que tenga centro en el punto B y radio igual a la longitud de AB.
- Responde, ¿por qué utilizamos circunferencias en los trazos? Determina la intersección de las circunferencias. Llama C a uno de los puntos de intersección.
- Traza los segmentos AC y BC.
 - Mide los lados del triángulo.
 - ¿Qué tipo de triángulo es ABC?
 - Argumenta tu respuesta.
 - Compara los resultados obtenidos a través de los distintos métodos. ¿Con cuál de ellos fue posible trazar un triángulo equilátero de manera precisa?

Análisis

Se realizan las Acciones siguientes: trazo libre de un triángulo con tres lados iguales y medición de la longitud de los lados utilizando el comando “distancia” en GeoGebra; trazo de triángulos equiláteros mediante el comando “polígono regular” y la medición de la longitud de sus lados; trazo en papel del triángulo con regla y compás, y medición de los lados. Se realizan Acciones de comparación de los resultados obtenidos en las distintas Acciones de trazo de

triángulos equiláteros. La repetición de Acciones, el análisis y la comparación de los diferentes métodos de trazo de un triángulo de tres lados de igual longitud promueven la interiorización de las Acciones en el proceso de triángulo equilátero.

Actividad 5

Trazo de un triángulos isósceles

- a) Traza un triángulo isósceles que tenga un lado de 3 cm y dos lados de 5 cm. Describe tu procedimiento.

Mide la longitud de los lados del triángulo que trazaste.

¿Fue preciso tu procedimiento?

- b) Trabaja en papel con regla y compás. Realiza los siguientes trazos.

- Traza un segmento AB de 3 cm de longitud.
- Traza una circunferencia que tenga centro en el punto A y radio 5.
- Traza una segunda circunferencia que tenga centro en el punto B y radio 5.
- Determina la intersección de las circunferencias y llama C a uno de los puntos de intersección.
- Traza los segmentos AC y BC.
- Mide la longitud de cada lado del triángulo.
- ¿Cómo se llaman los triángulos que tienen dos lados con la misma longitud?
- Compara los resultados obtenidos a través de los distintos métodos. ¿Con cuál de ellos fue posible trazar un triángulo equilátero de manera precisa?

Análisis

Se realizan las siguientes Acciones: trazo libre en papel de un triángulo con dos lados iguales y medición de la longitud de los lados; trazo en papel del triángulo con regla y compás, y medición de los lados. Se realizan Acciones de comparación de los resultados obtenidos en las distintas Acciones en términos de la característica de los lados de triángulos isósceles. La repetición de Acciones, el análisis y la comparación de los diferentes métodos de trazo de un triángulo que

tiene dos lados de igual longitud apoyan la interiorización de las Acciones en el proceso de triángulo isósceles.

Actividad 6

Trazo de triángulos escalenos

- Traza un triángulo cuyos lados midan: 4, 5 y 8 cm.
- Redacta el procedimiento que utilizarás.
- Comprueba tu procedimiento, traza el triángulo y mide los lados del triángulo.
- ¿Fue preciso el procedimiento que propusiste?
- ¿Cómo se llama el triángulo que trazaste?

Cuestionario final

- ¿Qué características tiene un triángulo equilátero?
- ¿Cómo se diferencia un triángulo isósceles de uno escaleno?
- ¿Qué método te parece el más preciso para trazar triángulos?
- Utilízalo y traza un triángulo escaleno.

Análisis

Se realiza la Acción de trazo de triángulos con lados de diferentes longitudes. Primero, las adolescentes hacen la descripción del procedimiento con el que podrían trazar el triángulo y después comprueban la eficacia de su procedimiento en la práctica. Para verificar los trazos realizan la Acción de medición de la longitud de los lados del triángulo. Se espera que las alumnas coordinen la Acción de trazo del triángulo con regla y compás utilizados en los triángulos equilátero e isósceles con el trazo de triángulo escaleno. Se realizan Acciones de reflexión en diferencias y semejanzas en los procedimientos utilizados en el trazo de triángulos, así como en las características de los triángulos equiláteros, isósceles y escalenos. Esto favorecen la interiorización del Procesos de la clasificación de triángulos con respecto a sus lados, así como el Proceso de trazo de triángulos con regla y compás, y su coordinación

Actividad 7

Observen el material que está adentro de la bolsa sin tocarla. Cada barrita representa un segmento de recta. Sin abrir la bolsa, respondan.

Figura 6

Palitos de madera de diferentes longitudes dentro de una bolsa de plástico.



1. Estimen, ¿cuántos triángulos diferentes pueden construir con ese material?
 2. ¿Cuántos triángulos equiláteros? Argumenten su respuesta.
 3. ¿Cuántos triángulos isósceles? Argumenten su respuesta. Describan cada triángulo.
 4. Saquen el material de la bolsa y construyan con el material los triángulos que escribieron.
- ¿Hay algún triángulo que no se pueda construir?

Si su respuesta es afirmativa, indiquen qué triángulos y expliquen la razón por la que no se pueden construir.

¿Qué relación debería existir entre la longitud de los dos segmentos más pequeños con respecto al tercer segmento?

5. Guarden nuevamente el material en la bolsa. Consideren que las longitudes de los segmentos de la bolsa son 8, 5, 4 y 3 cm. Con esta información, sin manipular el material, contesten: ¿cuántos y cuáles triángulos escalenos pueden construir con el material?

6. Redacten un enunciado que generalice la relación que debe existir entre la longitud de los tres lados de un triángulo.

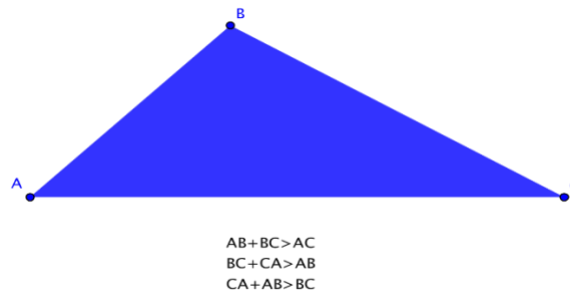
7. Comparen sus observaciones con el siguiente teorema.

LA DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO

En cualquier triángulo ABC sucede que la longitud de un lado del triángulo es siempre menor que la suma de los otros dos lados.

Figura 7

Desigualdad del triángulo.



Análisis

Se desencapsula el objeto triángulo en el proceso que le dio origen y se realizan acciones empíricas para la construcción de diferentes figuras de tres lados, así como para el reconocimiento de la relación entre las longitudes de los lados que la forman.

Con base en el material de la bolsa, sin tocarlo, se realiza la Acción empírica de conteo y comparación de triángulos equiláteros que es factible construir con el material. En esta parte, se espera que las alumnas hayan construido el triángulo equilátero como un Proceso que les permita observar y argumentar que hay tres segmentos de cada longitud. La siguiente Acción consiste en el conteo y la descripción de triángulos isósceles que se pueden construir con el material. Se espera que las alumnas hayan construido el triángulo isósceles como un Proceso que les permita pensar en relacionar dos segmentos de igual longitud con otro de longitud diferente y repetir esta acción con diferentes segmentos del material de la bolsa, así como registrar su respuesta. Se realiza la Acción de construir los triángulos propuestos con el material de la bolsa, situación que permite distinguir triángulos enunciados que no se pueden construir. Se realiza la acción de verbalizar la relación que debe existir entre la longitud de tres segmentos con los que es posible formar un triángulo. Esta Acción se interioriza en un Proceso cuando las alumnas pueden reconocen la relación entre los segmentos. Para verificar la validez de la propiedad, se realiza la acción de contar y describir los triángulos escalenos que se pueden construir con los segmentos, pero sin tocar el

material. Esta acción promueve la interiorización en el Proceso de reconocimiento de la relación entre las longitudes de los tres lados de cualquier triángulo, lo que se evidencia cuando las alumnas llaman la propiedad por su nombre y la aplican en la solución de problemas.

Actividad 8

Evaluación

1. Traza un triángulo de 5, 9 y 7 cm de lado.
2. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 8 cm?
3. Traza el triángulo anterior.
4. ¿Pudiste trazar el triángulo?, ¿por qué?
5. Cambia la longitud de uno de los lados por otro con el que sí se pueda trazar un triángulo y trázalo.

Análisis

El primer ejercicio evalúa la construcción del trazo de triángulos. Los ejercicios 2, 3 y 4 consisten en realizar Acciones sobre tres segmentos de los que se conoce su longitud para determinar el perímetro del triángulo e intentar trazarlo. Al hacerlo, las adolescentes se percatan de que no es posible trazar un triángulo con los tres segmentos propuestos, situación que deben explicar. En el ejercicio 5 se propone la modificación de la longitud de uno de los segmentos para tener la posibilidad de construir un triángulo con ellos. Esta actividad promueve la reflexión sobre la condición que deben cumplir los segmentos para, con ellos, poder construir un triángulo. La propuesta de modificación de una de las longitudes evidencia la interiorización del Proceso llamado desigualdad del triángulo. Esta propiedad se coordina con el proceso de clasificación de triángulos de acuerdo con la longitud de sus lados y apoya la encapsulación del Objeto triángulo como una figura cerrada de tres lados que, según la longitud de sus lados, se clasifica en equilátero, isósceles y escaleno, y cuyas longitudes satisfacen la desigualdad del triángulo.

FASE II

Actividad 1

Cuestionario de construcciones previas

1. ¿Qué es un ángulo?
2. ¿Qué es un grado?
3. ¿Qué es un ángulo recto?
4. ¿Qué es un ángulo llano?

Análisis

Este cuestionario tiene como objetivo evaluar las construcciones previas necesarias para la construcción del triángulo y sus propiedades, tomando como base el concepto de ángulo. Se requiere que los estudiantes tengan una noción de ángulo como objeto, que sepan trazar ángulos y medir su amplitud, además de que reconozcan ángulos de 90° , 180° y 360° y los llamen por su nombre.

Actividad 2

Traza un triángulo con las características mencionadas. En cada caso, decide la longitud de los lados, mide sus ángulos interiores y suma la medida de los tres ángulos interiores.

- a) Triángulo equilátero.
- b) Triángulo isósceles.
- c) Triángulo escaleno.

Responde: ¿qué relación hay entre la longitud de los lados de cada triángulos y la medida de sus ángulos interiores?

Análisis

Se desencapsula el Objeto triángulo en los elementos que le dieron origen y se realizan Acciones de trazo de triángulos equilátero, isósceles y escaleno. Se desencapsula el Objeto ángulo, se realizan acciones de medición de los ángulos interiores de los triángulos y de observación de la relación que guardan la longitud de los lados de los triángulos y la medida de sus ángulos interiores. Esta Acción favorece la interiorización en un Proceso que reconoce la relación entre las características de las longitudes de los lados de un triángulo con respecto a la característica de sus ángulos en un Proceso. Las adolescentes reconocerán que un triángulo con tres lados iguales también tiene tres ángulos iguales; un triángulo con dos lados iguales tiene dos ángulos iguales y un triángulo con tres lados de diferente longitud tiene tres ángulos de diferente medida. Su verbalización promueve la encapsulación del Objeto triángulo como una figura de tres lados y tres ángulos interiores.

Actividad 3

Realiza las siguientes actividades.

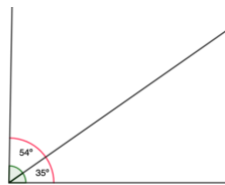
1. Determina la medida del ángulo marcado en color rojo en los ejercicios de la Figura 8.

- ¿Qué relación guarda el ángulo rojo con los ángulos conocidos?
- Explica: ¿cómo determinas el valor del ángulo rojo en cada caso?

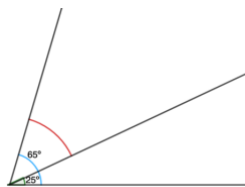
Figura 8

Grupo de figuras de la Actividad 3 incisos a), b), c) y d).

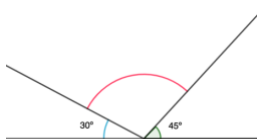
a)



b)



c)



d)



2. Dos ángulos que suman 90° se llaman complementarios y dos ángulos que suman 180° se llaman suplementarios. Responde:

- Si un ángulo mide 21° , ¿cuánto mide el ángulo complementario?
- Si un ángulo mide 155° , ¿cuánto mide el ángulo suplementario?
- Dados dos ángulos complementarios, si sabemos que uno mide 62° , ¿cuánto mide el otro ángulo?
- Dados dos ángulos suplementarios, si sabemos que uno mide 33° , ¿cuánto mide el otro ángulo?

Análisis

Se desencapsula el Objeto ángulo en los elementos que le dieron origen. Se realizan Acciones de reconocimiento y determinación de la medida de un ángulo a partir de la posición que ocupa respecto a otros ángulos de medida conocida. Estas Acciones sirven de introducción al

concepto de ángulos complementarios y suplementarios, y apoyan la determinación de la medida de este tipo de ángulos.

Actividad 4

1. Realiza las siguientes actividades:

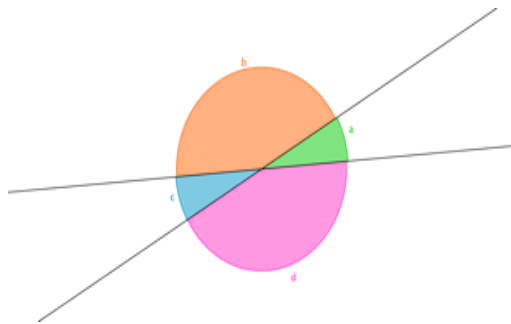
- Traza dos rectas que se crucen.
- Observa y responde: ¿cuántos ángulos se forman entre ellas?
- Mide todos los ángulos y describe la relación que observas entre ellos.
- Dibuja otro par de rectas que se crucen y verifica si la relación entre los ángulos es la misma que en el primer caso.

2. Propiedad de los ángulos opuestos por el vértice

La propiedad que has observado dice que **"los ángulos opuestos por el vértice son iguales"**. A continuación se demostrará este resultado. En la Figura 9 hay cuatro ángulos de nombres a, b, c y d, marcados de diferente color.

Figura 9

Rectas que cortan y ángulos entre ellas.



Pon atención en el siguiente razonamiento:

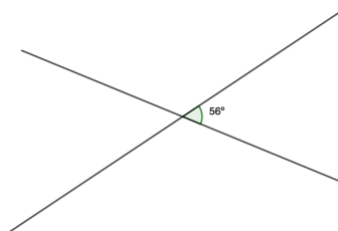
- ¿Cuánto suman los ángulos **a** y **b**? Argumenta tu respuesta.
- ¿Cuánto suman los ángulos **b** y **c**? Argumenta tu respuesta.
- Como $\mathbf{a+b=180^\circ}$ y $\mathbf{b+c=180^\circ}$,
Podemos afirmar que $\mathbf{a + b = b + c}$.
- Si restas **b** de ambos lados de la ecuación, ¿qué resultado obtienes?

- Observa que este razonamiento no depende de las medidas de los ángulos en la figura. Esto es una **demostración matemática** que garantiza que **los ángulos opuestos por el vértice son siempre iguales**.

2. Determina la medida de todos los ángulos que hay en la Figura 10.

Figura 10

Rectas que se cortan con ángulo conocido de 56° entre ellas.



4. Si uno de los ángulos entre dos rectas que se cruzan mide 128° , ¿cuánto miden todos los ángulos que se forman entre estas rectas?

Análisis

Se realizan Acciones de trazo de parejas de rectas que se cortan, de medición de los ángulos que se forman entre ellas y de reconocimiento de la relación entre las medidas de los ángulos. La repetición de esta Acción facilita la observación y descripción de la relación entre los ángulos. Se efectúa la Acción de demostración de la propiedad de que ángulos opuestos por el vértice son iguales. Esta Acción apoya la interiorización de la propiedad en un Proceso que permite a las alumnas reconocer la igualdad de ángulos opuestos por el vértice. En los ejercicios 3 y 4 se solicita encontrar la medida de todos los ángulos en parejas de líneas rectas que se cortan en un punto en las cuales se conoce la medida de uno de los ángulos. Para su solución, las alumnas deben coordinar el Proceso de ángulos suplementarios con el Proceso de ángulos opuestos por el vértice para determinar la medida de los ángulos buscados.

Actividad 5

1. Utiliza una hoja de papel que puedas recortar al final del ejercicio y realiza el siguiente procedimiento.

- Traza dos rectas paralelas. Luego, dibuja una tercera recta que cruce a las dos anteriores, recta que llamaremos secante.
- ¿Cuántos ángulos se forman entre las paralelas y la secante?
- Asigna una letra a cada ángulo: a, b, c, d, e, f, g, h.
- Escribe las parejas de ángulos que son opuestos por el vértice.
- Corta la hoja en dos partes de manera que las rectas paralelas queden en hojas separadas.
- Superposición del papel: coloca los pedazos de papel uno encima de otro de modo que coincidan las rectas paralelas y la secante.
- Escribe los ángulos que son iguales por la posición que ocupan en cada recta paralela. Completa las siguientes igualdades con los ángulos que correspondan:

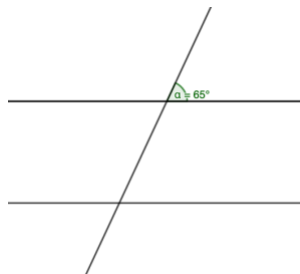
$a = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$; $b = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

- Repite la actividad con otra pareja de rectas paralelas y una secante. Analiza si en la segunda pareja se mantiene la relación que observaste entre los ángulos de la primera pareja de paralelas y la secante.
- Escribe de forma general la relación entre los ángulos que se forman en dos paralelas que se cortan por una secante.

3. Uno de los ángulos de la Figura 11 mide 65° . ¿Cuánto miden todos los demás ángulos? Argumenta tu respuesta.

Figura 11

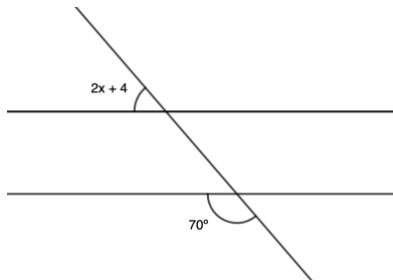
Rectas paralelas cortadas por una secante con un ángulo conocido de 65° .



4. Determina el valor de x en la Figura 12.

Figura 12

Rectas paralelas cortadas por una secante.



Análisis

Se realizan las siguientes Acciones: trazo de rectas paralelas y una secante; reconocimiento del total de ángulos y de parejas de ángulos opuestos por el vértice de entre ellos; de verificación empírica de la igualdad de los ángulos correspondientes formados entre rectas paralelas y la secante y, análisis y registro de la relación entre los ángulos. La repetición de Acciones con diferentes parejas de rectas paralelas cortadas por una secante promueve la interiorización en un Proceso que permite reconocer la relación entre todos los ángulos. La solución de los ejercicios requiere la coordinación de los Procesos de ángulos suplementarios y ángulos opuestos por el vértice en un nuevo Proceso que reconoce la relación entre los ángulos que se forman entre rectas paralelas cortadas por una secante.

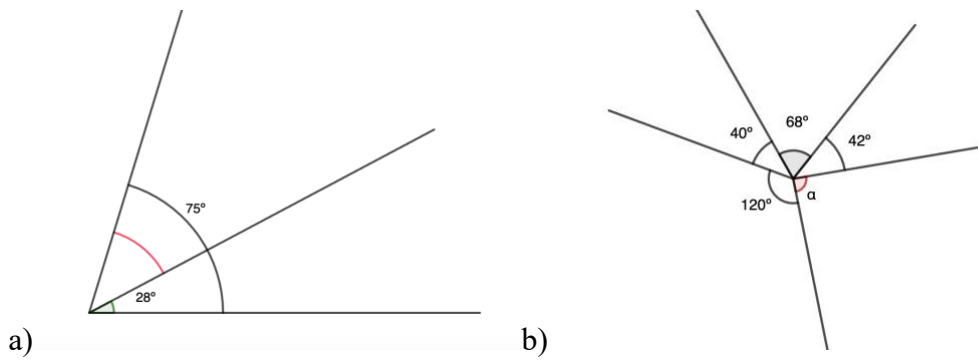
Actividad 6

Evaluación

1. Determina la medida del ángulo α de los ejercicios de la Figura 13.

Figura 13

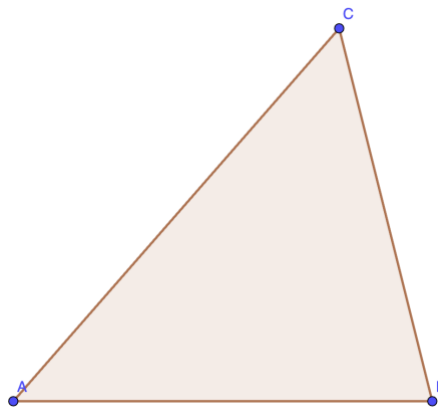
Actividad 6 Ejercicio 1 a) y 1 b).



2. Mide los ángulos interiores del triángulo de la Figura 14.

Figura 14

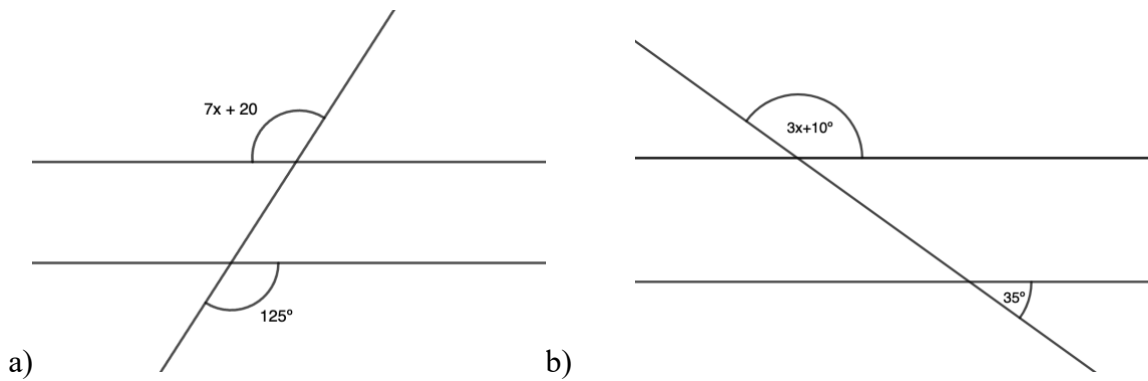
Triángulo ABC.



3. Determina el valor de x en los ejercicios de la Figura 15.

Figura 15

Rectas paralelas cortadas por una secante, inciso a) y b).



Análisis

Se realiza la actividad de evaluación parcial del reconocimiento de la relación de la medida de un ángulo con respecto a otros ángulos, de la medición de ángulos interiores de un triángulo y de la determinación de las medidas de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante. La respuesta a la segunda pregunta evalúa la Acción de medición de ángulos. La respuesta a la tercera pregunta ofrece evidencia de la coordinación de los Procesos de ángulos suplementarios y ángulos opuestos por el vértice en un nuevo Proceso que permite determinar los ángulos formados entre rectas paralelas cortadas por una secante.

Actividad 7

1. Para la siguiente actividad necesitas una hoja de papel, regla y tijeras.

- Traza un triángulo de cualquier forma en una hoja.
- Mide los ángulos interiores del triángulo.
- Marca cada ángulo con un color diferente.
- Recorta el triángulo con cuidado.
- Traza una recta en una hoja y marca un punto sobre ella.
- Recorta los ángulos del triángulo y pégalos sobre la recta, de modo que los tres vértices coincidan del mismo lado de la recta en el punto que marcaste.
- Observa los ángulos sobre la recta y responde: ¿cuánto suman los ángulos interiores del triángulo?
- Compara tu trabajo con el de tu compañera. ¿Cuánto sumaron los ángulos interiores de su triángulo?

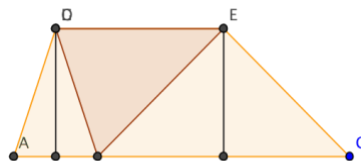
5. La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° . A continuación, haremos una demostración de esta propiedad con doblado de papel.

- Traza un triángulo en una hoja de papel y llama A, B y C a sus vértices. Recorta el triángulo con cuidado.
- Utiliza colores diferentes para marcar cada ángulo del triángulo.

- Dobla por la mitad cada lado del triángulo para marcar los puntos medios de cada lado. Llama D al punto medio de AB y E al punto medio de BC.
- Marca con un doblez el segmento DE, de manera que el vértice B coincida con la base AC, como en el ejemplo de la Figura 16.
- Marca dos rectas perpendiculares a la base AC que pasen por los puntos medios D y E.
- Dobla el triángulo siguiendo las perpendiculares de manera que los tres vértices coincidan.

Figura 16

Triángulo doblado por los puntos medios de los lados AB y BC.



- Haz un dibujo de la figura que resulta al hacer los dobleces.
- Justifica porque son suplementarios los tres ángulos del triángulo.

Escribe la propiedad que acabamos de demostrar.

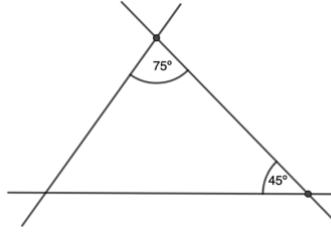
Actividad 8

Utiliza la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y determina la medida de todos los ángulos de los triángulos de la Figura 17.

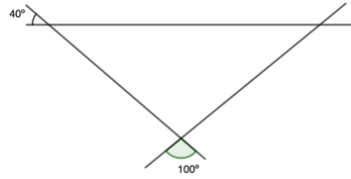
Figura 17

Grupo de figuras de la Actividad 8 incisos a), b) y c).

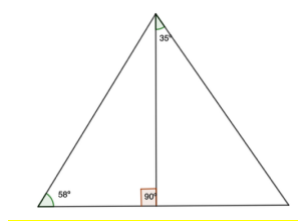
a)



b)



c)



Análisis

Se realizan Acciones de trazo de triángulos, de medición de ángulos interiores y de verificación empírica de que los tres ángulos interiores de un triángulo son suplementarios. Se realiza la Acción de demostrar, por medio del doblado de papel, la propiedad de que los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180° . Esta Acción apoya la interiorización en un Proceso que permite a las alumnas utilizar la propiedad para determinar la medida de ángulos desconocidos de un triángulo. Los ejercicios propuestos requieren la coordinación de tres Procesos; el Proceso de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo con el Proceso de ángulos opuestos por el vértice y el Proceso de ángulos suplementarios, en un nuevo Proceso que se evidencia cuando las adolescentes aplican la propiedad para la resolución de problemas y se

refieran a ella por su nombre. La coordinación de estos Procesos sobre los ángulos de los triángulos favorece la encapsulación del Objeto triángulo como una figura cerrada de tres lados y tres ángulos que satisface la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

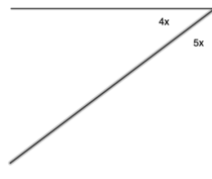
Actividad 9

Ejercicios de la guía de COMIPEMS

1. Observa la Figura 18 y de acuerdo con ella, ¿cuál es el valor de x ?

Figura 18

Ejercicio

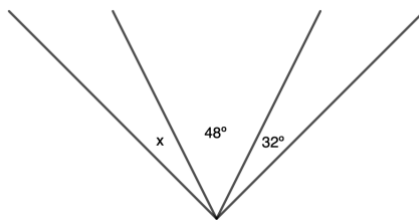


- a) 10°
- b) 40°
- c) 50°
- d) 59°

2. Observa la Figura 19 y de acuerdo con ella, ¿cuál es el valor de x ?

Figura 19

Ejercicio



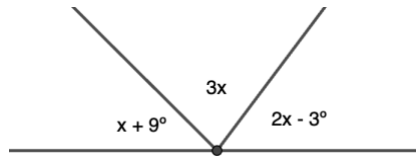
- a) 10°

- b) 20°
- c) 32°
- d) 56°

2. Observa la Figura 20 y de acuerdo con ella, ¿cuál es la medida de $\angle CAD$?

Figura 20

Ejercicio

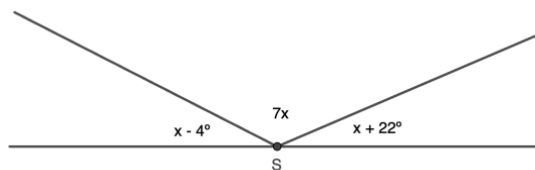


- a) 29°
- b) 38°
- c) 55°
- d) 87°

4. Observa la Figura 21. De acuerdo con ella, ¿cuál es el valor de x ?

Figura 21

Ejercicio

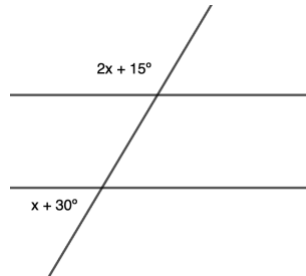


- a) 23°
- b) 18°
- c) 12°
- d) 9°

5. Encuentra el valor de x en la Figura 22.

Figura 22

Ejercicio

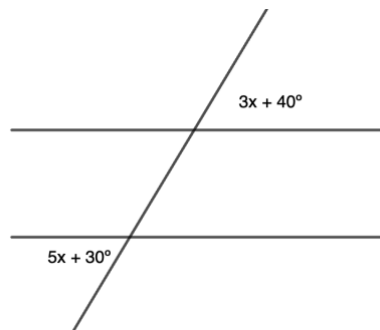


- a) 225°
- b) 135°
- c) 45°
- d) 35°

6. Determina el valor de x en la Figura 23.

Figura 23

Ejercicio

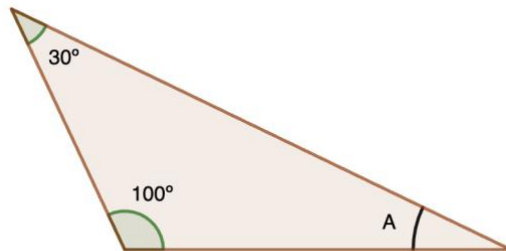


- a) 2°
- b) 4°
- c) 5°
- d) 10°

6. Determina el valor del ángulo A en el triángulo de la Figura 24.

Figura 24

Triángulo

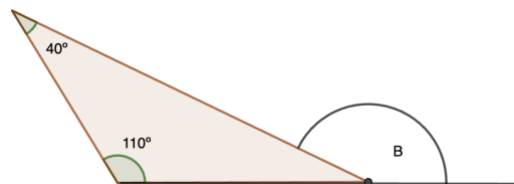


- a) 20°
- b) 40°
- c) 50°
- d) 90°

8. Determina el valor del ángulo B en el triángulo de la Figura 25.

Figura 25

Triángulo



- a) 150°
- b) 140°
- c) 100°
- d) 80°

Análisis

Se aplica una evaluación utilizando reactivos de la Guía de estudios de CONAMAT para el ingreso al bachillerato, con ejercicios similares a los que las adolescentes encontraran en el examen. El propósito de esta evaluación es indagar las construcciones realizadas por las estudiantes sobre los conceptos de los ángulos complementarios y suplementarios, los ángulos formados entre rectas paralelas cortadas por una secante, así como la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

FASE III

Actividad 1

1. ¿Qué es un triángulo rectángulo?
2. ¿Puede un triángulo tener dos ángulos rectos? Justifica tu respuesta.
3. Determina la medida del ángulo α . En cada triángulo de la Figura 26.

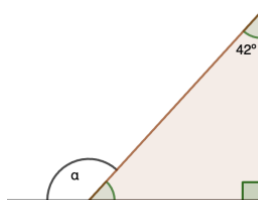
Figura 26

Triángulos, incisos a) y b)

a)



b)



Análisis

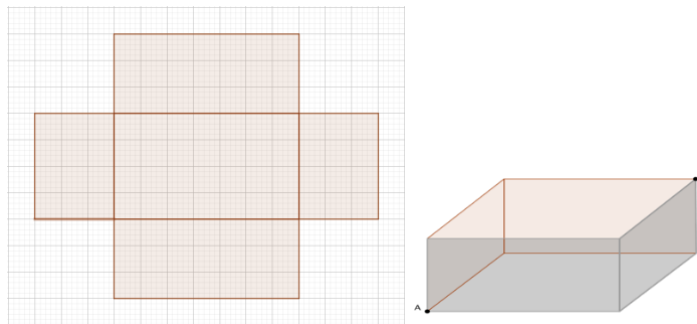
La evaluación tiene como objetivo reconocer las construcciones previas de triángulo rectángulo que tienen las alumnas. Se requiere saber si las estudiantes han construido el triángulo rectángulo como Objeto y si lo pueden coordinar con el Proceso de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Actividad 2

Resuelve el siguiente problema. Para ello, primero necesitas construir una caja. Recorta la Figura 27, que corresponde al desarrollo plano de una caja sin tapa cuya base es un rectángulo de 7 cm por 4 cm y su altura es de 3 cm. Une los lados con cinta adhesiva.

Figura 27

Desarrollo plano de una caja sin tapa y ejemplo de caja.



El problema: En una caja, una mosca y una hormiga que están en el punto A se desplazan al punto B. La hormiga camina por la superficie de la caja y la mosca vuela por el aire.

- Sin hacer cálculos, responde: ¿quién crees que recorre una distancia menor, la hormiga o la mosca? Explica tu respuesta.
- Explora diferentes trayectorias que puede recorrer la hormiga del punto A al punto B. Dibuja, sobre tu caja, diferentes trayectorias.
- ¿Qué distancia recorre la hormiga si decide caminar por las aristas de la caja?
- Si la hormiga decide caminar por la diagonal de la base de la caja. ¿Es esta trayectoria menor o mayor que la recorre por las aristas de la caja?

- ¿Qué tipo de triángulo se forma entre la diagonal de la base y los lados del rectángulo de la base?
- Marca el ángulo recto del triángulo.
- ¿Cuál es la medida de la diagonal?
- Dibuja otra trayectoria que marque el camino de la hormiga por la diagonal de una de las caras laterales.
- ¿Qué tipo de triángulo se forma entre la diagonal y los lados de la cara lateral de la caja?
- Marca el ángulo recto del triángulo.
- ¿Cuál sería la distancia recorrida en esta trayectoria?
- ¿Habrá una trayectoria menor a las ya marcadas?

A los triángulos que tienen un ángulo recto se les llama triángulos rectángulos. En un triángulo rectángulo, llamamos catetos a los lados que forman el ángulo recto e hipotenusa al lado opuesto al ángulo recto.

Análisis

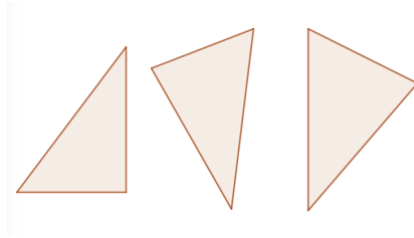
Esta actividad tiene la intención de introducir el concepto de triángulo rectángulo. Inicia con Acciones empíricas de construcción de una caja de base rectangular y de identificación de diversas trayectorias entre un vértice en la base de la caja y otro diametralmente opuesto en la parte superior. Se realizan Acciones de dibujo de las diferentes trayectorias. Las trayectorias que involucran diagonales de las caras representan una oportunidad para reconocer triángulos rectángulos y sus elementos. Por último, se ejecutan Acciones de comparación de la longitud de diferentes trayectorias.

Actividad 3

1. Realiza la actividad con los triángulos de la Figura 28.

Figura 28

Triángulos



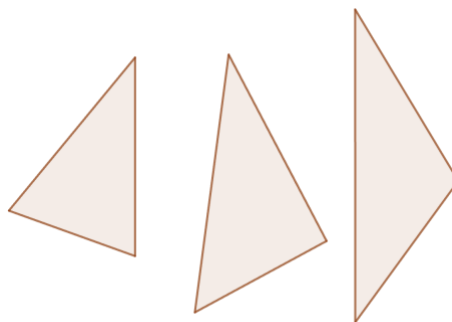
- Mide los ángulos interiores y escribe la medida de cada ángulo.
- Mide la longitud de los lados lo más preciso que puedas y escribe las longitudes. Eleva al cuadrado la longitud de cada lado.
- Suma los cuadrados de los dos lados más cortos y compara este valor con el cuadrado del tercer lado.
- Responde: ¿en qué triángulo coincide que la suma de los cuadrados de los lados menores es igual al cuadrado del lado mayor? ¿Qué característica tienen los ángulos de los triángulos que satisface la igualdad?

El triángulo que cumple que la suma de los cuadrados de los lados menores es igual al cuadrado del lado mayor es aquel que tiene un ángulo de 90° . En todo triángulo que tiene un ángulo de 90° se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa. Esta relación se conoce como el teorema de Pitágoras.

2. Realiza la actividad con los triángulos de la Figura 29.

Figura 29

Triángulos



¿Puedes a simple vista saber si alguno de estos triángulos es rectángulo?

- Mide la longitud de los lados de los triángulos y eleva al cuadrado cada lado.
- Suma los cuadrados de los dos lados más cortos y compara el resultado con el cuadrado del lado mayor.
- ¿Qué triángulo satisface la relación anterior? Mide los ángulos de los triángulos y verifica si el triángulo indicado tiene un ángulo de 90° .

Los triángulos rectángulos satisfacen una relación geométrica y una relación aritmética, es decir, si tenemos un triángulo con un ángulo de 90° sabemos que sus lados cumplen $a^2 + b^2 = c^2$ y, por otro lado, si tres números cumplen $a^2 + b^2 = c^2$ podemos asegurar que esos números son las longitudes de los lados de un triángulo que tiene un ángulo de 90° .

3. El Teorema de Pitágoras dice que en cualquier triángulo rectángulo se satisface que **“la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”**.

a) Traza un triángulo rectángulo cualquiera en una hoja. Calca y recorta 8 triángulos idénticos al que propusiste.

b) Escribe en cada triángulo los nombres de ***a***, ***b*** para los catetos y ***c*** para la hipotenusa. Usaremos las letras para referirnos a los segmentos como a sus longitudes.

c) En una hoja traza un segmento de recta que tenga de longitud $(a+b)$ y sobre el segmento construye un cuadrado de lado $(a+b)$.

d) Coloca cuatro de los triángulos que recortaste sobre el cuadrado de manera que el interior esté formado por los cuatro triángulos y un cuadrado.

e) Argumenta por qué la figura del interior es un cuadrado.

f) Escribe el área del cuadrado de lado $(a+b)$ en términos del área de los triángulos y el área del cuadrado.

g) Traza otro cuadrado de lado $(a+b)$ y coloca los triángulos de manera diferente, de forma que se formen dos rectángulos y dos cuadrados.

h) Escribe el área del cuadrado de lado $(a+b)$ en términos del área de los rectángulos y del área de los dos cuadrados.

i) Iguala las expresiones que obtuviste en los incisos f) y h) y reduce los términos que sea posible.

Observa que el resultado obtenido no depende de las medidas del triángulo que hayas propuesto.

Análisis

Se realizan las siguientes Acciones sobre triángulos: medición de ángulos y longitud de los lados de diferentes triángulos; se elevan al cuadrado las longitudes de los lados; se compara la suma de los cuadrados de los dos lados menores con el cuadrado del lado mayor; se analizan las características de los ángulos de los triángulos que satisfacen la igualdad. La repetición de Acciones se interioriza en un Proceso en el que se reconoce que, los lados de los triángulos que tienen un ángulo recto satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa.

Se realizan las Acciones sobre triángulos con la intención de determinar triángulos con un ángulo recto, sin medir los ángulos. Estas Acciones incluyen: medición de la longitud de los lados de los triángulos; elevación al cuadrado de las longitudes de los lados; comparación de la suma de los cuadrados de los dos lados menores con el cuadrado del lado mayor. La igualdad se cumple en los triángulos que tienen un ángulo recto, lo cual se comprueba de manera empírica. La repetición de Acciones permite observar que los triángulos cuyos lados satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$ tienen un ángulo recto.

Se realiza la Acción de la demostración del teorema de Pitágoras utilizando la equivalencia de áreas. Esto promueve la interiorización del teorema en un Proceso en el cual las alumnas asocian a los triángulos rectángulos la propiedad algebraica de $a^2 + b^2 = c^2$ y reconocen que si tres números satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$, entonces estos números pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

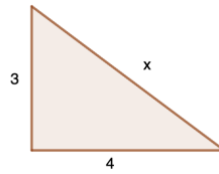
Actividad 4

1. Determina el valor del lado que falta en el triángulo rectángulo de la Figura 30.

a)

Figura 30

Triángulo rectángulo.

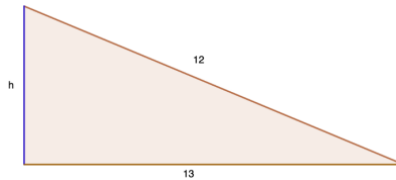


b) ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm?

b) ¿Cuál es la altura del asta bandera (h) en la Figura 31?

Figura 31

Triángulo que representa el asta bandera.



2. Desde la altura de la azotea de un edificio se observa a una persona que se dirige hacia la puerta. Suponiendo que la distancia visual de la persona desde el edificio es de 80 m y se encuentra a una altura de 44 m, ¿a qué distancia se encuentra del edificio?

- a) 59.3 m
- b) 66.8 m
- c) 74.4 m
- d) 82.3 m
- e) 94.1 m

3. Determina la altura de un triángulo rectángulo cuya área es de 9 cm^2 y la base mide la mitad de la altura.

- a) $h = 1.5$
- b) $h = 3.0$
- c) $h = 4.5$
- d) $h = 6.0$
- e) $h = 9.0$

Análisis

Los ejercicios presentan triángulos rectángulos de diferentes formas, tamaños y posiciones. En el inciso A) del primer ejercicio, las alumnas realizan Acciones que empiezan por identificar los elementos de los triángulos rectángulos y aplicar a ellos el teorema de Pitágoras para determinar la longitud de uno de los lados al sustituir los elementos en la relación $a^2 + b^2 = c^2$. En el inciso b), las alumnas deben aplicar Acciones a un triángulo sin referencia visual explícita, para ello, pueden trazar el triángulo y ubicar los elementos conocidos o bien pueden imaginar el triángulo y aplicar el teorema de teorema de Pitágoras. Esto daría evidencia de la interiorización del Proceso triángulo rectángulo y el Proceso del teorema de Pitágoras. La interiorización también se fortalece con la solución de los últimos ejercicios, los cuales están inscritos en un contexto. Las alumnas deben coordinar el Proceso de triángulo rectángulo y el Proceso de teorema de Pitágoras para poder resolver los problemas.

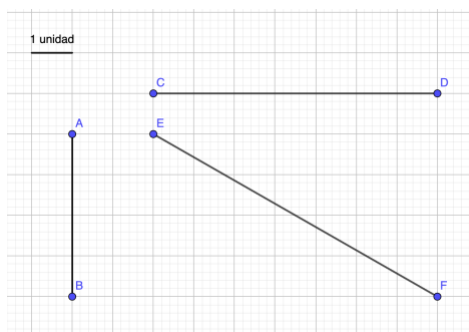
Actividad 5

Evaluación

1. Determina la longitud de los segmentos AB, CD y EF de la Figura 32.

Figura 32

Segmentos



2. ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 unidades respectivamente?
3. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 25 cm y un cateto de 7 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Análisis

Se realiza la evaluación de la construcción del triángulo rectángulo y sus elementos. El ejercicio 1 brinda la oportunidad de reflexionar sobre cómo medir la longitud de un segmento que no sea horizontal ni vertical. Se espera que las alumnas identifiquen que, para determinar la longitud de una diagonal, es posible construir un triángulo rectángulo auxiliar y aplicar el teorema de Pitágoras. Este ejercicio apoya la encapsulación del Objeto triángulo rectángulo como una figura con tres lados y tres ángulos, uno de ellos recto, cuyas longitudes de los lados satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$ conocida como el teorema de Pitágoras. Por su parte, los ejercicios 2 y 3 favorecen la encapsulación del Objeto triángulo rectángulo y la interiorización del teorema de Pitágoras como un Proceso. Las respuestas de esta evaluación podrían proporcionar evidencias de la encapsulación del Objeto triángulo rectángulo. Además, la aplicación del teorema de Pitágoras para determinar el lado faltante en cada caso da evidencia del avance de la noción del teorema de Pitágoras como Proceso.

Fase IV:

Relaciones entre triángulos: Congruencia

Actividad 1

La Figura 33 presenta una bolsa con triángulos de fomi de diferentes tamaños y formas. En la bolsa viven diferentes familias de triángulos, realiza con ellos la siguiente actividad:

- Clasifica los triángulos en familias y describe el criterio que utilizaste en la clasificación.

- Busca triángulos gemelos en las familias que clasificaste. Explica, ¿en qué se parecen los triángulos gemelos? ¿Cómo son los lados entre dos triángulos gemelos? ¿Cómo son los ángulos entre dos triángulos gemelos?

Figura 33

Triángulos de fomi de diferentes formas, tamaños y colores.



Análisis

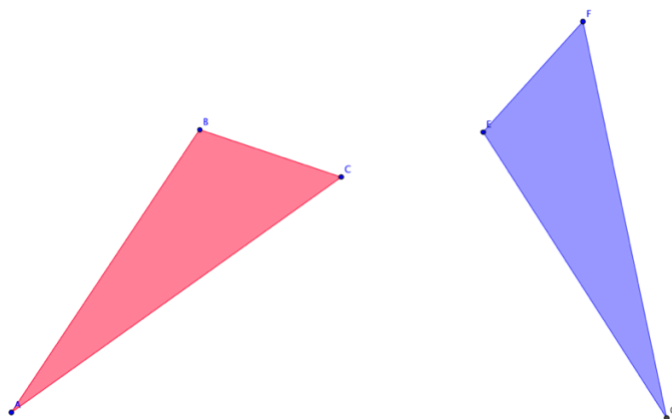
La actividad 1 sirve como introducción al concepto de congruencia, en ella se realizan Acciones empíricas de clasificación de triángulos, de identificación de “triángulos gemelos” y de comparación de los lados y ángulos de estos triángulos. La intención es reflexionar sobre triángulos que tienen lados y ángulos iguales.

Actividad 2

Observa los triángulos de la Figura 34. ¿Son triángulos gemelos?

Figura 34

Triángulos.



Comprueba tu respuesta:

- Recorta la pareja de triángulos y verifica si son gemelos.
- Mide los lados y los ángulos de ambos triángulos. ¿Cómo son las longitudes de los lados de los dos triángulos entre sí? ¿Cómo son los ángulos de los dos triángulos entre sí?

En los triángulos gemelos hay una correspondencia entre vértices, lados y ángulos. Escriban la correspondencia entre vértices, lados y ángulos de los triángulos ABC y EFG.

Definición: Dos triángulos se llaman congruentes si los lados y los ángulos correspondientes son iguales.

Análisis

Con la idea de introducir el concepto de correspondencia entre los elementos de dos triángulos congruentes se realizan las siguientes Acciones: identificación de “triángulos gemelos”; verificación empírica de la relación entre los lados y los ángulos de los “triángulos gemelos”, ya sea por superposición o por medición de lados y de ángulos y reconocimiento de la correspondencia entre los vértices, lados y ángulos de los triángulos.

Actividad 3

La actividad se realiza en grupo. En cada caso, tracen un triángulo que cumpla con las condiciones establecidas:

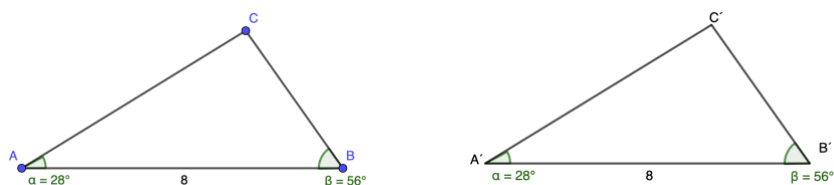
- a) Cada persona propondrá la longitud de un segmento ____, ____, _____. Dibujen el triángulo que tenga esos tres segmentos como lados. Luego, comparen los triángulos que han dibujado. ¿Son congruentes? Midan los ángulos y verifiquen su congruencia.
- b) Dibujen un triángulo que tenga dos lados con longitudes de 6 y 11 cm, donde el ángulo entre ellos sea de 35° . ¿Son congruentes los triángulos que dibujaron? Midan los lados y ángulos que faltan y verifiquen su congruencia.
- c) Dibujen un triángulo que tenga un lado de 9 cm, un ángulo de 48° en un extremo y un ángulo de 100° en el otro. ¿Son congruentes los triángulos que dibujaron? Midan los lados y ángulos que faltan y verifiquen su congruencia.

Para comprobar la congruencia de dos triángulos, podemos recurrir a atajos conocidos como “criterios de congruencia de triángulos”. Uno de estos criterios, denominado lado-lado-lado establece que “si los lados correspondientes de dos triángulos son iguales, entonces los triángulos son congruentes”. Esto significa que, si conocemos que dos triángulos tienen sus tres lados iguales, podemos afirmar sin necesidad de medir que los tres ángulos también son iguales. Los otros dos criterios de congruencia son: lado-ángulo-lado y ángulo-lado-ángulo. A continuación se realizan ejercicios de las Guías de COMIPEMS.

1. Teorema mediante el cual los triángulos de la Figura 35 son congruentes.

Figura 35

Triángulos.



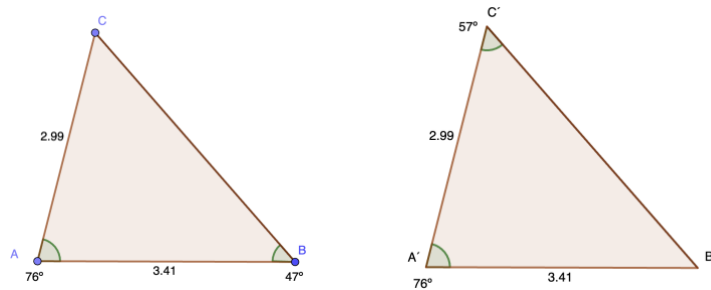
a) ALA

- b) LLL
- c) LAL
- d) AAA

2. Teorema mediante el cual los triángulos de la Figura 36 son congruentes.

Figura 36

Triángulos.



- a) ALA
- b) LLL
- c) LAL
- d) AAA

Análisis

Esta actividad tiene la intención de introducir la noción de criterios de congruencia de triángulos. Se realizan las siguientes Acciones: trazo de triángulos que cumplen ciertas condiciones, comparación de parejas de triángulos trazados para reconocer aquellos que son congruentes y definición de los criterios de congruencia de triángulos. Las Acciones promueven la interiorización de la congruencia de triángulos en un Proceso. Se presentan dos ejercicios de las guías de estudio para la preparación del examen de ingreso al bachillerato.

Actividad 4

Realiza el siguiente procedimiento:

- Traza un segmento y llama AB a los extremos.
- Traza una circunferencia con centro en A y radio AB.
- Traza otra circunferencia con centro en B y radio AB.
- Marca las intersecciones de las dos circunferencias que trazaste en los incisos anteriores.
- Une los puntos de intersección con una recta. La recta que trazaste se llama mediatriz. La mediatriz de un segmento es la recta que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a este.
- Llama O al punto donde la recta corta al segmento AB.
- Marca un punto cualquiera sobre la mediatriz y llámalo R. Traza los segmentos AR y BR. Mide sus longitudes. ¿Cómo son estos valores?

Demostraremos ahora que cualquier punto sobre la mediatriz está a la misma distancia de los extremos del segmento AB.

- Observa que se forman dos triángulos: ARO y RBO. Queremos demostrar que el lado AR es igual al lado RB; para ello, demostraremos que los triángulos ARO y RBO son congruentes.
- Demostración:
 - $AO=OB$ porque la definición de mediatriz menciona que pasa por el punto medio del segmento.
 - $\angle AOR = \angle ROB = 90^\circ$ porque la definición de mediatriz enuncia que es una recta perpendicular al segmento.
 - OR es un lado común.

Por lo tanto, por el criterio de LAL podemos afirmar que los triángulos ARO y RBO son congruentes, es decir que todos sus lados y ángulos son iguales. En particular, el lado $AR=RB$ que es lo queríamos demostrar. La demostración se puede aplicar para cualquier punto de la mediatriz, por lo que podemos afirmar que los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del segmento.

Análisis

Se realizan las siguientes Acciones: trazo de mediatriz de un segmento; verificación empírica de que los puntos de una mediatriz equidistan de los extremos del segmento y demostración de la propiedad. Estas Acciones se realizan de manera conjunta entre las alumnas y la maestra y promueven la interiorización de la congruencia entre dos triángulos en un Proceso que se evidencia al aplicar los criterios de congruencia en la resolución de problemas.

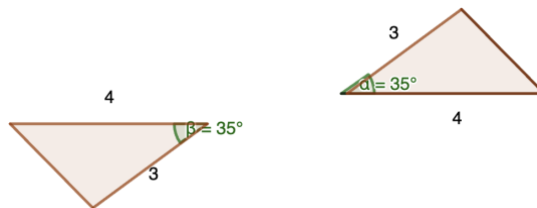
Actividad 5

Evaluación

1. Explica: ¿qué es la congruencia de triángulos?
2. ¿Cuáles son los criterios de congruencia de triángulos y para qué sirven?
3. Teorema mediante el cual los triángulos de la Figura 37 son congruentes.

Figura 37

Triángulos.

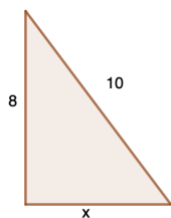


4. Encuentra el valor que representa x en cada triángulo de la Figura 38.

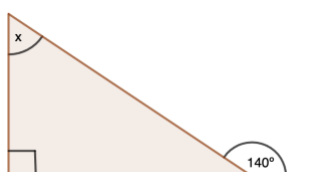
Figura 38

Grupo de triángulos de la Actividad 5 inciso 4 a), b) y c).

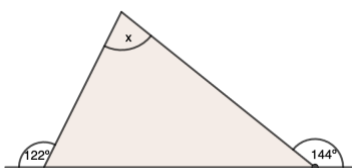
a)



b)



c)



Análisis

Se aplica una evaluación sobre la construcción de la congruencia de triángulos y los criterios de congruencia de triángulos. También se presentan ejercicios que evalúan la construcción y coordinación de los Procesos del teorema de Pitágoras, suma de ángulos opuestos por el vértice y ángulos suplementarios.

Relaciones entre triángulos: Semejanza

Actividad 1

Realiza las siguientes actividades, con el material con los triángulos de fomi de diferentes tamaños, formas y colores que se presenta en la Figura 39.

1. Clasifica el material de la bolsa en familias de triángulos que tengan tres ángulos iguales.
2. Describe cómo se ven los triángulos de una misma familia.

3. Selecciona dos triángulos de una misma familia que no sean congruentes y cácalos en una hoja.
4. Mide los lados de ambos triángulos. Escribe las medidas sobre cada lado.
5. Escribe las razones entre las longitudes de los lados correspondiente y compáralas. ¿Las razones forman una proporción?
6. Repite la actividad con otra pareja de triángulos que tengan los tres ángulos iguales.

Figura 39

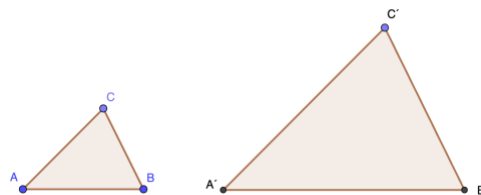
Triángulos de fomi de diferentes formas, tamaños y colores.



Definición: Dos triángulos que tienen sus tres ángulos iguales y sus lados proporcionales se llaman semejantes. Los triángulos de la Figura 40 son semejantes. Para referirnos a ellos utilizamos la notación $ABC \approx A'B'C'$.

Figura 40

Triángulos semejantes.



Análisis

Como introducción al concepto de semejanza, en la Actividad 1 se realizan Acciones empíricas de comparación de triángulos en términos de sus ángulos; después, se realizan las

Acciones de medición de la longitud de los lados y comparación de las razones entre los lados correspondientes para verificar que forman una proporción. La repetición de Acciones promueve el reconocimiento de que dos triángulos que tienen ángulos correspondientes iguales también tienen lados proporcionales.

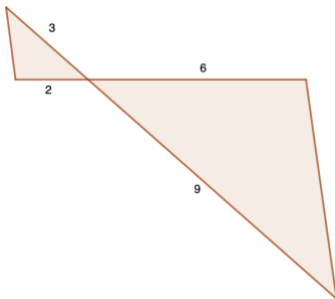
Actividad 2

1. Determina si los triángulos de la Figura 41 son semejantes.

Figura 41

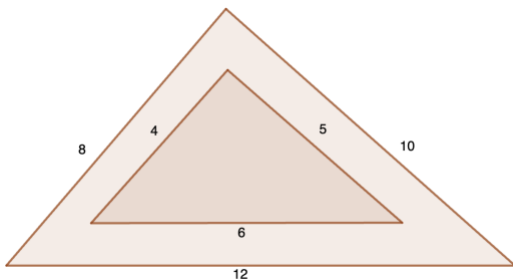
Triángulos Actividad 2 Ejercicio 1 Incisos a) y b)

a)



- ¿Qué ángulos son iguales en los triángulos de la ilustración?
- Verifica si las razones entre los lados correspondientes forman una proporción.
- Mide los ángulos y los lados que faltan y comprueba si los triángulos son semejantes.

b)



- Verifica si las razones entre los lados correspondientes de los triángulos forman una proporción.

- Mide los ángulos de los dos triángulos. ¿Cómo son las medidas de los ángulos correspondientes entre sí?
- ¿Son semejantes los triángulos?

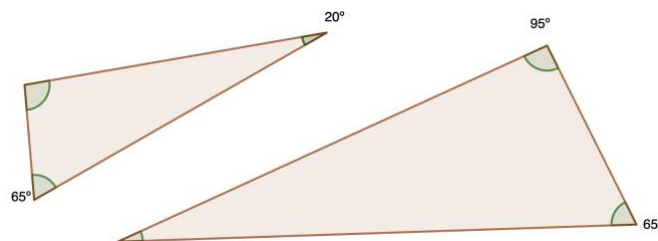
Para comprobar la semejanza de dos triángulos podemos utilizar atajos que se conocen como “criterios de semejanza de triángulos”. Uno de ellos dice que “si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes”. Esto quiere decir que, si sabemos que dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales, entonces podemos afirmar que los ángulos también son iguales. Los otros dos criterios de semejanza son: lado proporcional-ángulo-lado proporcional y ángulo-ángulo. Nos referimos a los criterios de semejanza como $L_pL_pL_p$, L_pAL_p , AA .

2. Determina si las parejas de triángulos de la Figura 42 son semejantes. Justifica tu respuesta en cada caso.

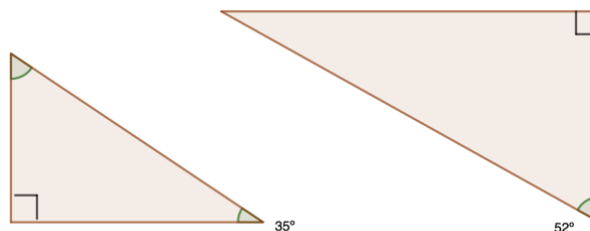
Figura 42

Triángulos Actividad 2 Ejercicio 2 Incisos a) y b).

a)



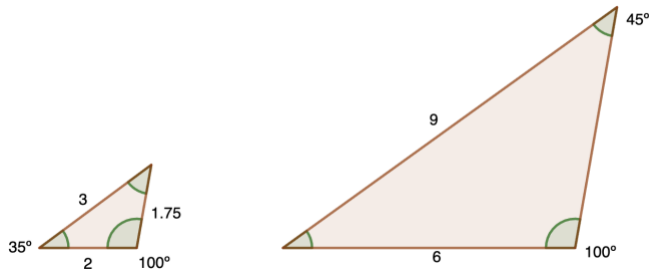
b)



3. A partir de la información de los triángulos de la Figura 43, determina la medida de los lados y los ángulos que faltan.

Figura 43

Triángulos Actividad 2 Ejercicio 3.



- ¿Son semejantes los triángulos? ¿Qué criterio de semejanza justifica tu respuesta?
- Escribe las razones de los lados correspondientes y encuentra la longitud del lado que falta.

Análisis

Esta Actividad tiene el propósito de introducir los criterios de semejanza de triángulos. Se realizan Acciones de medición de lados y ángulos. Con información parcial de dos triángulos, se realizan Acciones de verificación de que razones iguales entre lados correspondientes de dos triángulos implica que los triángulos también tienen ángulos correspondientes iguales, lo que permite determinar que los triángulos son semejantes. De igual forma, se afirma que dos triángulos con tres ángulos iguales también tiene lados proporcionales.

Los ejercicios 2 y 3 buscan facilitar la interiorización de la semejanza de triángulos como un Proceso. En estos ejercicios, las alumnas deberán coordinar el Proceso de triángulos semejantes con el Proceso de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. El tercer ejercicio evidencia la construcción de la semejanza como Proceso, ya que será necesario determinar la semejanza de los triángulos utilizando la información parcial del problema, plantear la proporción entre los lados correspondientes y emplearla para calcular el valor que falta.

Actividad 3

En la siguiente actividad, mediremos la altura de un árbol del jardín. Realiza lo siguiente:

- Dibuja el árbol y su sombra. También haz un dibujo tuyo y de tu sombra.
- ¿Qué tipo de triángulos se forman en los dibujos?
- ¿Son semejantes los triángulos dibujados?
- ¿Qué criterio de semejanza justifica tu respuesta?
- ¿Puedes medir la altura del árbol?
- Mide la sombra del árbol y tu sombra. Escribe estos datos sobre el dibujo.
- Escribe tu estatura en el lugar correspondiente.
- Plantea las razones entre los lados y determina la altura del árbol.

Análisis

Se realiza la Acción empírica de medición de la altura de un árbol del jardín mediante la medida de elementos relacionados con triángulos que están al alcance de las adolescentes. Para ello las adolescentes desencapsulan el Objeto triángulo rectángulo en los elementos que le dieron origen. Aplican Acciones para determinar la semejanza entre el triángulo rectángulo formado por el árbol y su sombra en el piso con el triángulo formado por una adolescente y su sombra en el piso. Estas Acciones pueden apoyar la interiorización de la semejanza de triángulos como un Proceso y la resolución de la actividad puede ser evidencia de ello.

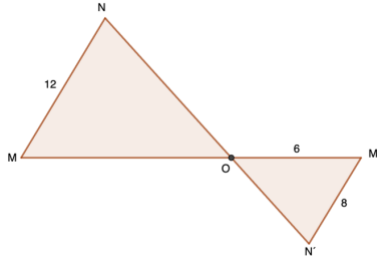
Actividad 4

Resuelve los siguientes ejercicios tipo del examen de COMIPEMS.

1. Los triángulos de la Figura 44 son semejantes, ¿cuál es el valor del lado MO?

Figura 44

Triángulos.

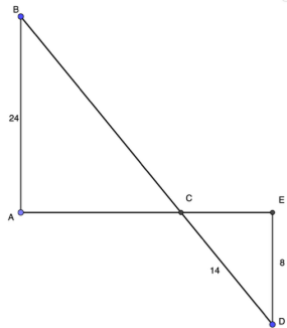


- a) 9
- b) 12
- c) 14
- d) 16

2. Si los triángulos de la Figura 45 son semejantes, encuentra el valor del segmento BC.

Figura 45

Triángulos.

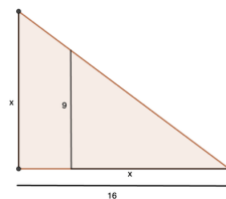


- a) 42
- b) 35
- c) 28
- d) 7

3. Si los triángulos de la Figura 46 son semejantes, determina el valor de x.

Figura 46

Triángulos.



- a) 9
- b) 12
- c) 15
- d) 18

Análisis

Se resuelven ejercicios tipo del examen de COMIPEMS con los que se espera que las alumnas demuestren la construcción del concepto de triángulos semejantes como un Proceso. Esto se puede evidenciar cuando las adolescentes realizan Acciones de reconocimiento de que los lados correspondientes de los triángulos son proporcionales, y del establecimiento de las proporciones necesarias para determinar el valor buscado en cada ejercicio.

Actividad 5

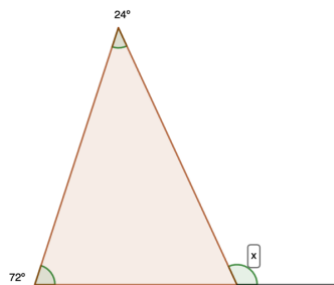
Evaluación

1. Construye un mapa conceptual con los conceptos sobre el triángulo que hemos estudiado hasta el momento.
2. Determina el valor de x en los ejercicios de la Figura 47.

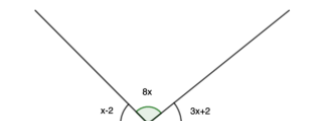
Figura 47

Grupo de figuras de la Actividad 5 Ejercicio 2 Incisos a), b), c), d) y e)

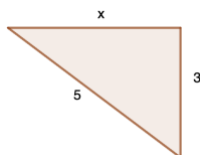
- a)



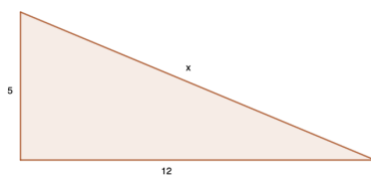
b)



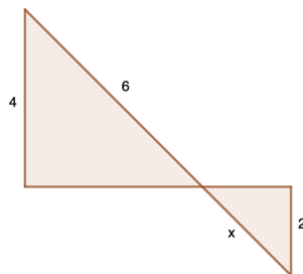
c)



d)



e)



Análisis

En la primera parte de esta Actividad se aplica una evaluación para valorar, mediante la elaboración de un mapa conceptual, los conceptos que las adolescentes han construido y las relaciones entre ellos. En la segunda parte, se evalúan las construcciones del Proceso de suma de ángulos interiores de un triángulo y el Proceso de ángulos suplementarios, así como su coordinación, también se evalúa la construcción del teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos.

Relaciones entre triángulos: Razones trigonométricas

Actividad 1

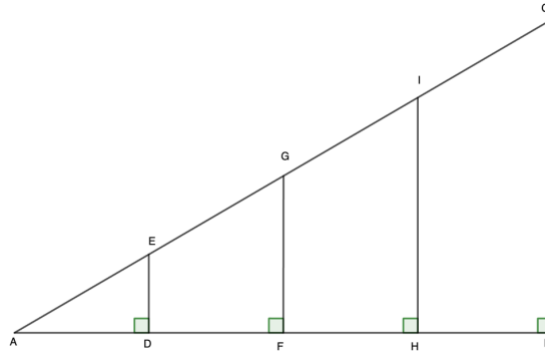
1. Traza un triángulo rectángulo en una hoja de papel (sugerencia: que sea de tamaño grande).
2. Cálcalo en otra hoja y recorta uno de ellos.
3. Divide el triángulo que recortaste en dos triángulos que sean semejantes.
4. Explica por qué son semejantes los triángulos que cortaste.
5. Responde verdadero o falso y explica tu respuesta: “todos los triángulos rectángulos son semejantes”.

Actividad 2

1. Observa los triángulos ABC, AHI, AFG y ADE de la Figura 48.
2. ¿Son semejantes los triángulos ABC y AGF? Argumenta tu respuesta.
3. ¿Son semejantes los triángulos ABC y ADE? Argumenta tu respuesta.

Figura 48

Triángulos.



Como los triángulos $ABC \approx AHI \approx AFG \approx ADE$ son semejantes, se cumple que los lados son proporcionales.

4. Completa las siguientes proporciones:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\quad}{AH} = \frac{FG}{\quad} = \frac{DE}{\quad}$$

$$\frac{CB}{AC} = \frac{HI}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{AE}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{\quad} = \frac{FG}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

5. Mide los segmentos y encuentra el valor de cada proporción.

Análisis

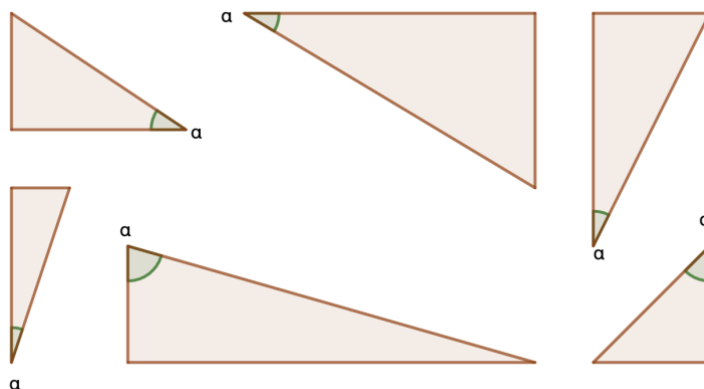
La primera Actividad tiene como objetivo introducir de manera lúdica el concepto de semejanza de triángulos en triángulos rectángulos. Comienza con Acciones empíricas de trazo de un triángulo rectángulo y de la división, de este, en dos triángulos que sean semejantes al original. En la siguiente Actividad se realizan Acciones de comparación entre triángulos rectángulos para determinar la semejanza entre ellos, la argumentación de las propiedades que sustentan dicha semejanza y de la escritura de las razones entre lados correspondientes de triángulos semejantes.

Actividad 3

1. Marca el cateto opuesto al ángulo α de los triángulos de la Figura 49.

Figura 49

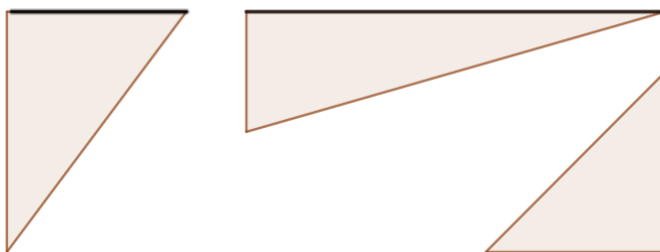
Triángulos.



2. Marca el ángulo que es opuesto al cateto señalado en cada triángulo de la Figura 50.

Figura 50

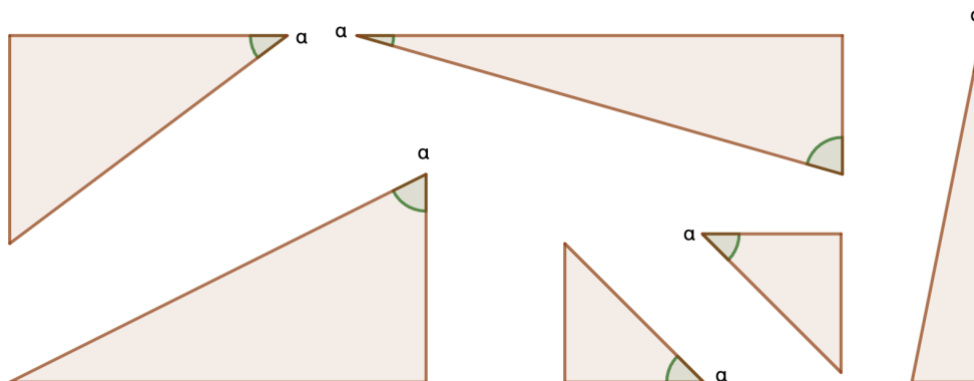
Triángulos.



3. Al cateto que no es opuesto a un ángulo se le llama cateto adyacente. Marca el cateto adyacente al ángulo α en cada triángulo de la Figura 51.

Figura 51

Triángulos.



Análisis

En esta Actividad se desencapsula el Objeto triángulo rectángulo en los elementos que le dieron origen. Con estos, se realizan Acciones que permiten reconocer la posición de los catetos en relación con uno de los ángulos agudos. De esta manera, se asigna un nombre específico a cada cateto de acuerdo con su ubicación. Estas Acciones se interiorizan en el Proceso que identifica los catetos opuesto y adyacente en relación con uno de los ángulos agudos del triángulo y que se evidencia cuando las alumnas se refieren a estos elementos por su nombre.

Actividad 4

Sea el ángulo en el vértice A de la Figura 52. Se define:

Seno del ángulo A como $\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

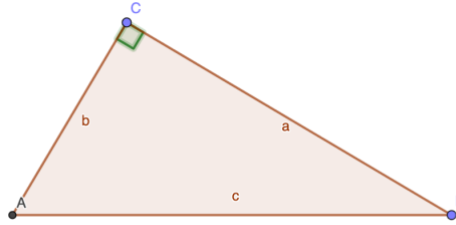
Coseno del ángulo A como $\text{cos } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

Tangente del ángulo A como $\text{tan } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

1. Escribe las siguientes razones trigonométricas del ángulo correspondiente de la Figura 52.

Figura 52

Triángulo ABC.



Sen A =

Cos A =

Tan A =

Sen B =

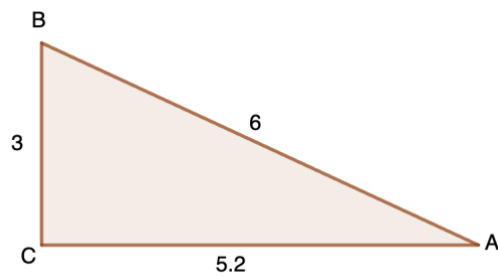
Cos B =

Tan B =

2.Determina el valor del seno, el coseno y la tangente de los ángulos de la Figura 53.

Figura 53

Triángulo ABC.

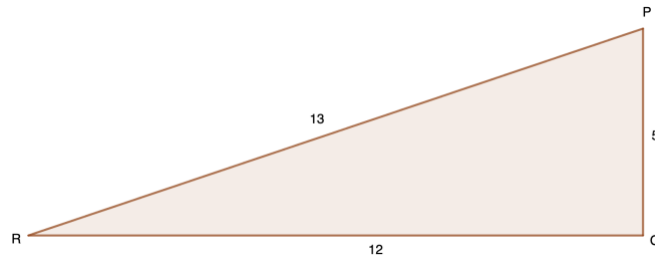


Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
A			
B			

3. Completa la tabla con el valor de cada razón trigonométrica de la Figura 54.

Figura 54

Triángulo PQR.



Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
P			
R			

Análisis

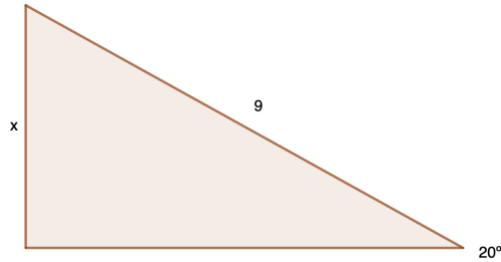
En esta Actividad, se desencapsula el Objeto triángulo rectángulo en los elementos que le dan origen. Se aplica la Acción de reconocimiento de los elementos del triángulo y de la asignación del nombre de los lados en relación con uno de los ángulos agudos. Se realiza la Acción de escribir las razones trigonométricas entre los lados del triángulo. La repetición de Acciones promueve la interiorización del Proceso de razón trigonométrica, lo cual se evidencia cuando las alumnas identifican las razones por su nombre.

Actividad 5

1. Determina el valor de x del triángulo de la Figura 55.

Figura 55

Triángulo.

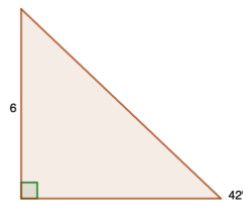


- ¿Qué razón trigonométrica relaciona el cateto opuesto y la hipotenusa?
- Sustituye los datos del problema en la razón que escribiste.
- Encuentra el seno de 20° en la tabla de las razones trigonométricas y reemplaza el valor.
- Resuelve la ecuación y determina el valor de x .

2. Determina la medida de los lados y los ángulos que faltan en el triángulo de la Figura 56.

Figura 56

Triángulo.

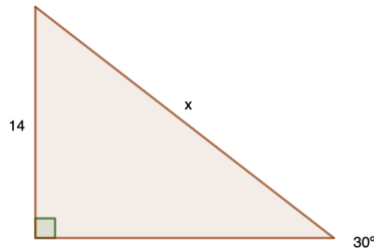


- Determina la medida de los ángulos que faltan.
- Llama x al cateto que falta. ¿Qué razón trigonométrica relaciona el ángulo de 42° con el cateto de longitud 6 y el cateto que falta?
- Sustituye la información del problema en la razón correspondiente. Busca en la tabla de las razones trigonométricas el valor de la razón propuesta y determina el valor del cateto que falta.
- Por último, encuentra la longitud de la hipotenusa. Explica tu procedimiento.

3. Determina el valor de x del triángulo de la Figura 57.

Figura 57

Triángulo.

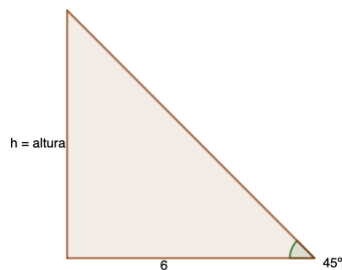


- ¿Qué razón trigonométrica relaciona el cateto opuesto y la hipotenusa?
- Escribe la información del problema en la razón que escribiste.
- Encuentra el seno de 30° en la tabla de las razones trigonométricas.
- Determina el valor de x .

4. El triángulo de la Figura 58 representa la altura (h) de un asta bandera. Con la información del problema determina, ¿cuál es la altura (h) del asta bandera?

Figura 58

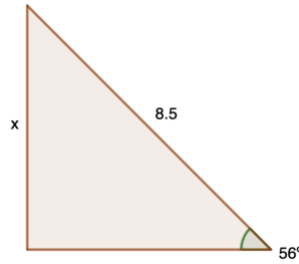
Triángulo.



5. El triángulo de la Figura 59 representa una escalera de 8.5 metros de longitud apoyada en una pared, ¿qué altura alcanza sobre la pared si forma con el suelo un ángulo de 56° ?

Figura 59

Triángulo.



Análisis

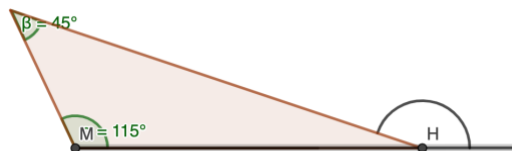
Los ejercicios de la Actividad 5 representan una oportunidad para utilizar las construcciones mentales relacionadas con las razones trigonométricas. Para empezar las alumnas desencapsulan el Objeto triángulo rectángulo en los elementos que le dieron origen. Después, se realizan Acciones enfocadas en la determinación de las razones trigonométricas que relacionan los elementos que constituyen cada ejercicio, de localización del valor numérico de la razón trigonométrica en una tabla y de la determinación mediante operaciones algebraica del valor buscado. La repetición de Acciones promueve la interiorización de las razones trigonométricas en un Proceso que permite a las adolescentes determinar elementos desconocidos de un triángulo y se evidencia cuando se aplica en la resolución de problemas.

3.4.4 Examen de evaluación de conocimientos

1. ¿Cuál es el valor del ángulo H en el triángulo de la Figura 60?

Figura 60

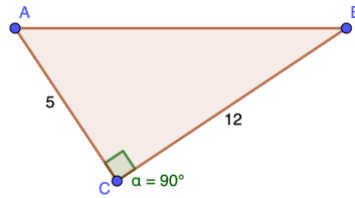
Triángulo



2. Determina el perímetro del triángulo ABC de la Figura 61 y explica tu procedimiento.

Figura 61

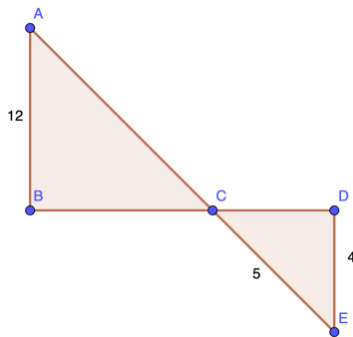
Triángulo



3. Los triángulos ABC y CDE de la Figura 62 son semejantes y solo se conoce la medida de 3 lados. Determina la medida de todos los lados de triángulo.

Figura 62

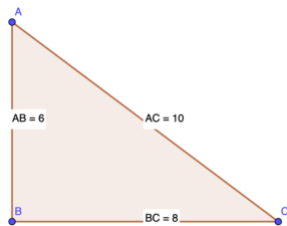
Triángulos semejantes



4. Determina las razones trigonométricas del ángulo A del triángulo de la Figura 63.

Figura 63

Triángulo



5. Si el coseno del ángulo A es $\frac{3}{5}$, ¿cuál es el valor del seno del mismo ángulo?

Análisis

Se aplica una evaluación general que valora las construcciones realizadas por las adolescentes sobre los conceptos de suma de ángulos interiores de un triángulo, ángulos suplementarios, teorema de Pitágoras, semejanza de triángulos y razones trigonométricas. También se valora la coordinación y las relaciones construidas entre estos conceptos.

3.4.5. Examen evaluación post-COMIPEMS

- a) Traza un cuadrado de 4 cm de lado y llama A, B, C y D a los vértices.
- b) Traza la diagonal BD.
- c) Respecto a sus lados ¿Qué tipo de triángulo es BCD?
- d) ¿Cuál es el perímetro del triángulo BCD?
- e) ¿Cuánto miden sus tres ángulos interiores?
- f) ¿Cuál es el seno del ángulo B?
- g) ¿Cuál es la tangente del ángulo D?

Análisis

La evaluación pretende evaluar la construcción de la clasificación de triángulos con respecto a sus lados y sus ángulos. Si las adolescentes reconocen el triángulo isósceles y el triángulo rectángulo podría ser evidencia de la construcción Acción, sin embargo, si reconocen que el triángulo tiene dos ángulos iguales podría ser evidencia de la construcción Proceso. También se indaga la construcción del Objeto triángulo rectángulo y el Proceso teorema de Pitágoras, al igual que la construcción Acción de las razones trigonométricas.

3.5. Recolección y análisis de datos

El análisis de esta investigación se enfoca en dos aspectos: por un lado, la exploración de la construcción del conocimiento matemático a través del marco teórico APOE, y por otro, la investigación de los elementos contextuales que podrían influir en el aprendizaje de las matemáticas y en el desarrollo de las sesiones.

Los instrumentos de recolección de datos incluyen:

- Entrevistas semiestructuradas: Se realizó una entrevista inicial de 60 minutos con ambas adolescentes, cuyo propósito fue determinar los elementos contextuales de la vida de las adolescentes que pueden influir en su aprendizaje. Además, se realizaron dos entrevistas de 90 minutos con directivos y pedagogos de la casa hogar para entender el encuadre de la institución, el contexto y la trayectoria de vida de la población de estudio. Por último, se aplicó una entrevista a las adolescentes seis meses después de la intervención, con el propósito de indagar qué estructuras mentales de los conceptos abordados en las sesiones habían construido. Por último, seis meses después de la intervención se realizó una entrevista de 30 minutos a cada adolescentes. El guión de las entrevistas se presenta en el Anexo 2.

- Observación de clase: Esta observación se enfocó en recoger información no solo sobre los aspectos pedagógicos asociados al marco teórico, sino también sobre los elementos contextuales que surgieron durante la intervención y las interacciones entre las adolescentes y con la docente.

- Documentos escritos: Este grupo comprende los documentos de trabajo de las adolescentes, que incluyen los ejercicios y evaluaciones realizados durante todo el proceso de enseñanza. Además, incluye un escrito que sirve como biografía matemática, que se aplicó al inicio de la intervención donde las adolescentes escribieron de su puño y letra su relación con las matemáticas y la percepción de sus habilidades en esta área.

- Audios y transcripción de las sesiones de trabajo: Las grabaciones se analizaron a través de la escucha atenta y posterior transcripción, lo que permitió una revisión detallada de las interacciones y de los procesos de aprendizaje.

- Exámenes: Se aplicó un examen al inicio de la intervención para evaluar los conocimientos sobre triángulos de las participantes. El mismo examen se aplicó al final de la intervención para comparar las construcciones mentales evidenciadas por las adolescentes al final del proceso. Además, durante la visita realizada seis meses después de

la presentación del examen de ingreso al nivel medio superior se aplicó una evaluación a las adolescentes para valorar las estructuras construidas durante la intervención.

El análisis de los datos busca una comprensión integral del proceso de aprendizaje, destacando las interrelaciones entre la vulnerabilidad y el aprendizaje matemático de las adolescentes. Para lo anterior, la sistematización de los datos se realizó de la siguiente manera: las sesiones y entrevistas transcritas fueron analizadas a través de un proceso de triangulación entre la investigadora y los asesores, con la finalidad de lograr un consenso interpretativo. Este proceso implicó cruzar la lectura de las transcripciones con la información de los documentos escritos para identificar evidencias de posibles construcciones mentales. Además, se consideraron los elementos contextuales presentes en el entorno del aula, en las dinámicas de interacción entre las adolescentes y en los conocimientos previos contemplados en la Descomposición Genética y que resultan fundamentales para la realización de las actividades. En esta parte se incluyó la información recopilada de las entrevistas tanto a las adolescentes como a los directivos de la casa hogar.

Las adolescentes que trabajan en la sesión son la unidad de análisis. Se establecieron dos categorías de análisis: por un lado, las estructuras y mecanismos mentales según la teoría APOE, para lo que el análisis se concentró en el ámbito cognitivo. Por otro, las interferencias que surgieron durante la implementación de las actividades, las cuales se analizaron mediante una metodología cualitativa. Identificar la relación entre ambas categorías tiene como finalidad poner de manifiesto los posibles obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas que se derivan de la vulnerabilidad. El objetivo es comprender a las personas en su contexto, reconociendo que la actividad que realizan y el contexto son inseparables.

La relación entre la construcción de conceptos matemáticos y los elementos del contexto de vulnerabilidad de las adolescentes que viven en casas hogar, se manifiesta en una serie de obstáculos que dificultan la participación activa en las actividades diseñadas a partir de la Descomposición Genética. Durante el desarrollo de las sesiones, se identificaron elementos que llamamos **interferencias**, las cuales alteran o interrumpen el desarrollo previsto de las actividades matemáticas. El análisis de estas interferencias busca revelar posibles obstáculos en el aprendizaje matemático de adolescentes de poblaciones en situación de vulnerabilidad. Si bien la Descomposición Genética permite modelar hipotéticamente la construcción del conocimiento

matemático, en la práctica las interferencias muestran desviaciones respecto del camino hipotético previsto y son elementos que modifican el proceso de construcción cognitiva.

Investigaciones previas han abordado cómo las interacciones sociales pueden actuar como facilitadoras o bloqueadoras de la participación estudiantil (Planas, 2002). En el caso de estudiantes en situación de vulnerabilidad, las interferencias pueden ser la expresión de conflictos afectivos o emocionales que surgen en el aula, y que están vinculados con su contexto. Para Van Dijk et al. (1997), las diferencias culturales pueden originar conflictos comunicativos que afectan la participación. Las interferencias observadas pueden también ser entendidas como interrupciones emocionales, en el sentido que plantea Mandler (1984), es decir, como la no finalización de una acción iniciada debido a discrepancias entre lo esperado y lo percibido. Planas (1999) mostró que los alumnos con identidades sociales marcadas por la exclusión tienden a mostrar su no participación de manera explícita, lo que se manifiesta como interrupciones del aprendizaje.

Para realizar este análisis, se clasificaron las interferencias en tres categorías principales:

1. **Conocimientos previos**, que generan barreras para construir nuevos conceptos.
2. **Entorno del aula**, interrupciones externas por diferentes causas, entre ellas dinámicas institucionales propias del encuadre de la casa hogar.
3. **Interacciones entre adolescentes**, que incluyen conflictos interpersonales.

Tabla 1

Categorías de interferencias e indicadores observables para su análisis e interpretación.

Categoría	Descripción	Indicadores observables
Conocimientos previos	Dificultades relacionadas con vacíos, fragmentación o construcciones previas erróneas.	- Dificultad para reconocer concepto previos necesarios para la actividad. - Falta de habilidades motrices requeridas para el desarrollo de las actividades.

			- Uso inapropiado de términos matemáticos.
Entorno del aula	Condiciones materiales, ambientales o institucionales que afectan la concentración o continuidad.		- Interrupciones frecuentes por encuadre de la casa hogar. - Discontinuidad de las sesiones: ausencias o llegadas tardías.
Interacciones entre adolescentes	Dinámicas sociales que influyen en la participación, que incluyen conflictos o alianzas.		- Comentarios despectivos o agresivos entre pares. - Dificultad para trabajar colaborativamente.

La Tabla 1 presenta las categorías, su descripción y los indicadores; estos últimos nos ayudan a comprender los elementos del contexto que se están observando para el análisis y nos facilitan la interpretación de un elemento como interferencia. Las categorías no son mutuamente excluyentes, una misma interferencia puede emerger como combinación de varios factores.

Como ya se ha señalado anteriormente, la gestión docente juega un papel clave como nexo entre los ámbitos afectivo y cognitivo, de manera que asegura la creación de un ambiente propicio para la adquisición de conocimientos matemáticos. En este sentido, la gestión docente se refiere a las estrategias utilizadas para mitigar las interferencias y promover el aprendizaje.

Por último, dado que la población de estudio está compuesta por adolescentes en situación de vulnerabilidad, se garantizó el cumplimiento de principios éticos que incluyen: el consentimiento informado por parte de las participantes y/o responsables legales; la confidencialidad y el anonimato en el manejo de datos personales; el respeto y cuidado en la recopilación y análisis de la información. En este sentido, se presenta en el Anexo 1 el consentimiento por escrito que otorgó la casa hogar, en el cual se autoriza la realización del trabajo de campo con las adolescentes que allí residen.

3.6. Trayectorias de vida

Para situar el aprendizaje de las matemáticas en un contexto más amplio en la vida de las adolescentes, se reconstruyeron las trayectorias de vida. Estas permiten analizar la experiencia individual y colectiva para buscar patrones comunes y diferencias. Las trayectorias se refieren “a procesos longitudinales asociados a la edad conformados por una serie de transiciones o acontecimientos cruciales en la vida de las personas, los cuales permiten observar el modo en que dichas transiciones se van concatenando y van definiendo la trayectoria específica de la persona, grupo o cohorte analizado, en un periodo de tiempo mayor” (Berrio, 2014, p. 214). De este modo las trayectorias se reconstruyen a partir de la información vertida en las entrevistas con las adolescentes, con las pedagogas y la directora de la casa hogar. Las trayectorias de vida brindan información clave sobre la vida de las adolescentes. Para el análisis de este trabajo se considera el contexto de origen, la edad de ingreso a la casa hogar, el tiempo de permanencia en ella, la trayectoria académica e interrupciones en su ciclo educativo. Estos elementos incluyen las categorías enunciadas en el perfil de la población de estudio. Esta información resulta valiosa para entender cómo estas experiencias pueden influir en el aprendizaje de las matemáticas.

3.7 Conclusión

En este capítulo se ha definido el estudio de caso como el enfoque metodológico que guía esta investigación. Se definen los casos y el perfil de la población de estudio. En la sección 3.4 se declaran los elementos de la teoría APOE que sirven como herramienta para el desarrollo de la investigación que incluyen la descomposición genética, el análisis de las actividades y los exámenes de evaluación. En la sección 3.5 se describe la metodología utilizada en la recolección y el análisis de los datos, elementos que se reportan en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en la implementación de las actividades que se diseñaron con base en la Descomposición Genética. Los resultados se organizaron por fase, de modo que en la sección 4.2 se presentan las construcciones realizadas por las adolescentes, la relación de interferencias y una conclusión por fase. Esta sección cierra con un resumen de las construcciones mentales y las interferencias.

La sección 4.3 complementa los resultados del comparativo de respuestas al examen de conocimientos que se aplicó a las adolescentes tanto al inicio como al final de la intervención, la sección 4.4 presenta los resultados de la entrevista y la evaluación del examen aplicado seis meses después de la intervención, por último, la sección 4.5 expone una conclusión de los resultados obtenidos en el capítulo.

4.2 Resultados del análisis cognitivo y del análisis de las interferencias

La intervención didáctica se desarrolló en sesiones de una hora y media impartidas los martes y/o los jueves, del 10 de marzo al 24 de junio del 2022, en un horario de 11:30 a 13:00. Durante este periodo se realizaron un total de veinte sesiones, aunque en este trabajo solo se reportan los resultados de doce de ellas. En las sesiones restantes se estudiaron temas como conjuntos de números, fracciones (incluyendo el concepto, operaciones y la expresión decimal de una fracción), máximo común divisor y mínimo común múltiplo y variación proporcional. La Tabla 2 presenta una relación de fases y sesiones por fecha.

Tabla 2*Relación de fases y sesiones impartidas en la intervención didáctica.*

Fase	Sesión	Fecha
1	1	05/04/22
	2	12/04/22
	3	21/04/22
2	1	28/04/22
	2	05/05/22
3	1	12/05/22
	2	17/05/22
4	1	26/05/22
	2	31/05/22
	3	07/06/22
	4	14/06/22
	5	16/06/22

A continuación, se presentan los resultados de la implementación de las actividades diseñadas a partir de la DG. Por fase, se exponen las actividades que reflejan las construcciones realizadas por las adolescentes, acompañadas de diálogos que ilustran el contexto en el cual se desarrollaron las actividades. Esta sección ha sido titulada “El contexto en los diálogos”. Dado que la intervención se desarrolló durante un periodo extenso, se seleccionaron aquellas actividades que mejor representan las construcciones realizadas por las jóvenes, así como los diálogos que ilustran el entorno en el que se desarrollaron. Después, se presenta la relación de las interferencias de cada fase, para su identificación (Id) se construye una triada que indica Fase-Sesión-Interferencia, las primeras hacen referencia a la fase y sesión en la que se desarrolló y, dado que podría haber varias interferencias en una sola sesión, se enumeran de acuerdo con el orden en el que ocurren. Al final de cada fase, se presenta una conclusión en donde se mezclan, analizan, o interpretan el análisis cognitivo y el análisis de interferencias.

4.2.1. Resultados de la Fase I

En la DG se declararon las siguientes construcciones previas: Punto – Objeto, Segmento – Objeto; longitud – Objeto, Ángulo – Objeto y Circunferencia - Objeto (punto, radio, centro). Se asumió que estos eran Objetos previamente contruidos por las adolescentes. Sin embargo, durante las sesiones se evidenció que no se habían construido y que había otros Objetos como el concepto

mismo de triángulo que tampoco había sido construido. Por lo tanto, fue necesario reconstruir sobre la marcha conocimientos previos no declarados en la DG que se asumían como construidos. Esta situación se hizo evidente en las respuestas de las adolescentes a la evaluación inicial de conocimientos previos.

Actividad 1

Respuestas al cuestionario de contenidos previos

Nicte

- a) ¿Cuál es la diferencia entre un segmento y una recta?

Dibujó unas rectas perpendiculares en el margen de la hoja y escribió “lo vi en primaria pero no me acuerdo”

- b) ¿Qué son rectas paralelas?

No sé.

- c) ¿Qué son rectas perpendiculares?

No sé.

- d) ¿Qué es un triángulo?

Triángulo figura con dos lados iguales y uno diferente

- e) ¿Cuál es la característica de un triángulo isósceles?

No sé.

- f) ¿Qué es un triángulo rectángulo?

No sé.

Yamil

- a) ¿Cuál es la diferencia entre un segmento y una recta?

No sé, sí me suena, pero no me acuerdo.

- b) ¿Qué son rectas paralelas?

No me acuerdo, sé que lo vi.

- c) ¿Qué son rectas perpendiculares?

No me acuerdo.

d) ¿Qué es un triángulo?

Un triángulo es una figura geométrica de tres lados iguales.

e) ¿Cuál es la característica de un triángulo isósceles?

No me acuerdo.

f) ¿Qué es un triángulo rectángulo?

No me acuerdo.

El contexto en los diálogos

Y: ¿Qué son rectas perpendiculares? ¿Puedo sacar mi cuaderno?

S: No.

Y: ¿Por qué no puedo sacar mi cuaderno? No tenía mucho, como un mes y medio o dos que acabamos de ver esto en la escuela.

S: Lo que me interesa es saber si lo vieron en algún momento y de qué se acuerdan.

Y: En primaria. Sí recuerdo, pero no recuerdo cuándo.

N: Yo lo vi en primaria.

S: Si se acuerdan de algo podrían al menos dibujarlo.

A: Las paralelas son las que van así y las perpendiculares son las que se cruzan.

S: Por favor, dibújalas, pero no en tu mano, en la hoja.

A: Es que no sé cómo ponerlo. ¿Puedo sacar mi cuaderno?

Al inicio se observó que las adolescentes no habían construido los conocimientos previos que se declaran en la descomposición genética. En particular, y como se observará en el análisis de las interferencias, resaltan las definiciones sobre el triángulo que escribieron: para Nigte, un triángulo es una figura de dos lados iguales y uno diferente, mientras que para Yamil es una figura de tres lados iguales.

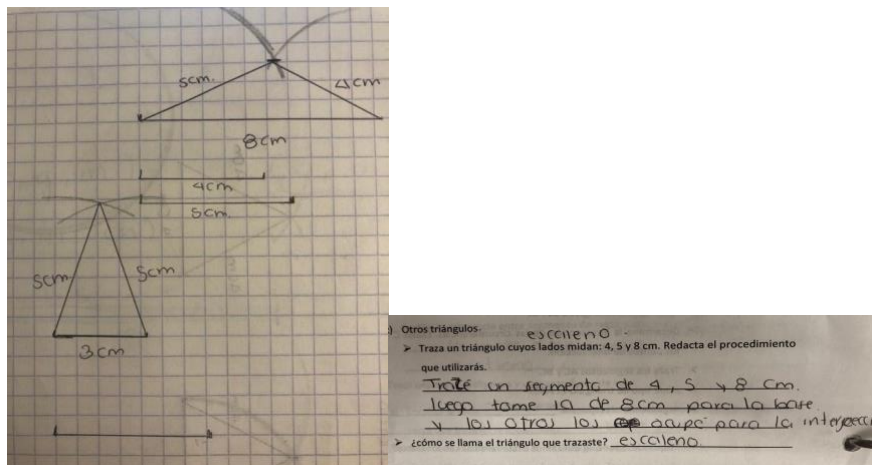
Actividades 4, 5 y 6

Nigte

En la Actividad 4 relacionada con el trazo de triángulos equiláteros, Nichte comenzó por dibujar el primer triángulo utilizando un método de ensayo y error. Sin embargo, cuando se le presentó el procedimiento con regla y compás decidió adoptarlo. Posteriormente, replicó este método para trazar el triángulo isósceles en la Actividad 5. En la Figura 64 se presenta el trabajo de Nichte en la Actividad 6 en la que trazó el triángulo escaleno con regla y compás a pesar de no haber recibido instrucciones explícitas sobre cómo hacerlo, lo cual indica que construyó el trazo de triángulos con regla y compás como una Acción. Además, construyó el segmento como un Objeto, el cual aplicó en el trazo de los triángulos. Su procedimiento fue particular: comenzó trazando los segmentos que formarían el triángulo de manera horizontal y luego utilizó estos segmentos para fijar la abertura del compás. Esto sugiere que también ha construido la circunferencia como Acción. Por último, redactó su procedimiento de la siguiente manera: “Tracé un segmento de 4, 5 y 8 cm. Luego, tomé la de 8 cm para la base y los otros los ocupé para la intersección”, como se observa en la Figura 64.

Figura 64

Trazo de Nichte de triángulos isósceles y escaleno y la descripción de su procedimiento.



Yamil

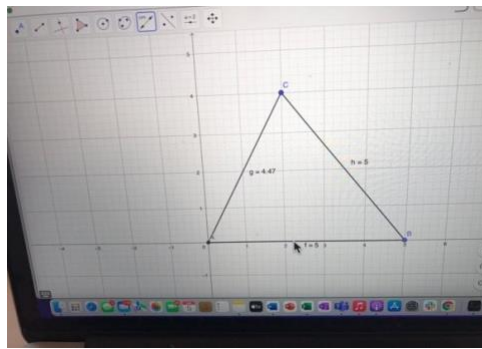
En la Actividad 4, para el trazo del triángulo equilátero de 5 cm, primero dibujó un segmento horizontal de 5 cm, ubicó la mitad y subió de manera vertical, aproximadamente 5 cm. Marcó el punto y lo unió con los extremos. Midió la longitud de los lados de su triángulo: 4.47, 5 y 5, como

se observa en la Figura 65. Escribió: “Trazamos un punto de referencia y nos guiamos con ese punto para hacer el triángulo”. Después, se le presentó el procedimiento con regla y compás.

En la Actividad 5, trazó un triángulo isósceles con dos lados de 5 cm y uno de 3 cm. Para ello, primero trazó el segmento de 3 cm, calculó el punto medio, subió de manera vertical, aproximadamente 5 cm y marcó un punto que unió con los extremos del segmento original. Cuando midió las longitudes de los lados del triángulo obtuvo 3, 4.9 y 4.8. Explicó su procedimiento: “Lo medí con la regla”.

Figura 65

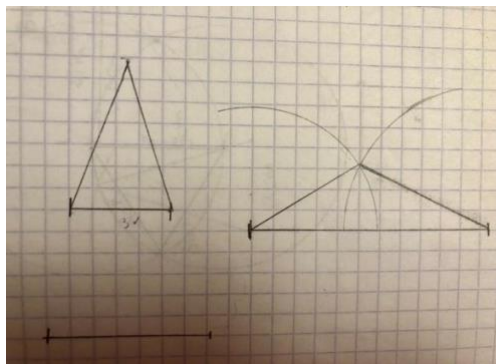
Trazo de Yamil de triángulo equilátero en GeoGebra.



Se solicitó a Nicté que le explicara a Yamil el procedimiento de trazo del triángulo isósceles con regla y compás. Yamil replicó el procedimiento que describió Nicté, trazando incluso los segmentos horizontales como lo hizo Nicté. Yamil mostró problemas en el manejo del compás. En la Actividad 6, Yamil trazó el triángulo escaleno de lados 4, 5 y 8 cm con regla y el compás, no dibujó los segmentos auxiliares, pero tuvo problemas en la coordinación en el manejo del compás, trabajo que se observa en la Figura 66. Dijo: “eso es lo que no me gusta” (se refiere al uso del compás, sus movimientos eran bruscos y, cuando lo giraba, movía el centro de lugar). Se le ayudó a sujetar el compás en el trazo de cada circunferencia. Cuando completó el triángulo, dijo “¡guau!”. Yamil ha construido parcialmente la Acción de trazo de triángulos con regla y compás.

Figura 66

Trazo de Yamil de triángulo isósceles y escaleno con regla y compás.



Actividad 7

La Actividad 7 se realizó con los palitos de madera de la Figura 67.

Figura 67

Palitos de madera utilizado en la actividad 7.



1. ¿Cuántos triángulos equiláteros pueden construir? Argumenten su respuesta.

N: 4, vi 4 colores: rojo, verde, azul y amarillo y cada uno tiene 3 palos.

Y: 4, porque son 4 colores y cada color tiene 3 piezas.

2. ¿Cuántos y cuáles triángulos isósceles diferentes se pueden construir?

Y: 12. Con el rojo son 3 y con cada color 3. Serían 12.

S: Vamos a escribirlos todos en el pizarrón. *Se define con las adolescentes que se hablará de los segmentos de acuerdo con el tamaño de cada segmento: G-gigante, g-grande, M-mediano y ch-chico.*

Y: GGg, GGM, GGch, MMG, MMg, MMch, chchG, chchg, chchM, ggG, ggM, ggch.

S: Ahora, construyan cada triángulo con el material.

Y: Los tenemos que construir a fuerzas.

S: Sí.

N: Yo formo dos y tú dos, yo el chico y el grande, y tú el Gigante y el mediano.

S: ¿Qué les parece si los construyen juntas en medio? *No respondieron y prefirieron construirlos de manera independiente como se habían organizado.*

3. ¿En qué triángulos encontraron problemas?

N: Todo lo que lleve Gigante no se va a cerrar. Ah no, los míos sí, menos uno, chchG

S: ¿por qué no se puede construir ese triángulo?

N: Porque no cierra. *(Ver Figura 68)*

Y: MMG no sé, cierra, pero como que no se forma el triángulo.

S: ¿Cómo debe ser el tamaño del segmento mayor con respecto al tamaño de los dos segmentos pequeños?

Y: Que sea una proporcionalidad.

S: Y ¿qué es una proporcionalidad?

Y: Que sea equivalente, tal vez no del mismo tamaño, pero sí como unos 6.

Señalando los segmentos pequeños, se les pregunta: ¿Qué tiene que pasar con estos dos lados para que se pueda formar un triángulo?

Y: Medir un centímetro más.

S: Cuando se forme el triángulo, los dos segmentos pequeños juntos deben ser más grandes que el otro. Con esta idea, quiero que me digan cuáles escalenos se pueden formar.

Figura 68

Construcción de triángulos isósceles con los palitos de madera.



4. Guarden el material de nuevo en la bolsa y respondan (sin tocar el material): ¿cuántos y cuáles triángulos escalenos se pueden formar con cuatro segmentos de 8, 5, 4 y 3 cm?

S: La idea es que respondan sin construir los triángulos.

Y: Sin construirlos, ¿verdad?

N: GgM. Solo va a ser ese.

Y: Mgch.

S: ¿Se puede construir el GMch? *Se les pide que lo construyan con el material. Se dan cuenta de que el GMch no se puede construir. Se observa que la longitud de los dos segmentos más chicos debe ser más grande que el otro.*

N: Ggch tampoco se puede construir porque es lo que mide el otro.

El trabajo de las adolescentes parece evidenciar la interiorización de la clasificación de los triángulos con respecto a sus lados en un Proceso, esto se sustenta en la descripción que hacen ambas de los triángulos equiláteros, la enumeración de los triángulos isósceles y la respuesta de qué triángulos escalenos se pueden construir. En esta actividad se las adolescentes muestran dificultades para trabajar de manera colaborativa, aunque se pudieron organizar para dividirse el trabajo y cada una realizar su parte.

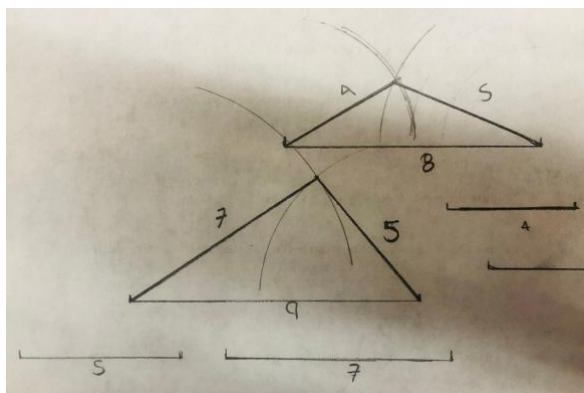
Actividad 8

Nicte

1. Traza en el reverso de la hoja un triángulo de lados 5, 9 y 7 cm. *Nicte trazó el triángulo con regla y compás.*
2. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 8? *Escribió 16.*
3. Traza el triángulo anterior. *En sus trazos se observa que intentó trazar el triángulo, se aprecia el arco de una circunferencia de 3 cm.*
4. ¿Pudiste trazar el triángulo?
N: No.
¿Por qué?
N: No se cierra.
5. Cambia uno de los lados por otro con el que sí se pueda trazar un triángulo y trázalo. *Cambió el lado de 3 cm por uno de 4 cm, como tampoco cerraba, lo borró y lo cambió por uno de 5 cm, como se observa en la Figura 69.*

Figura 69

Trazos de Nicte en la Actividad 8 Ejercicio 5.



Yamil

1. Traza en el reverso de la hoja un triángulo de lados 5, 9 y 7.
- Yamil trazó un segmento de 9 cm, con la regla localizó al tanteo el tercer lado del triángulo. Después, se le pidió que midiera los lados y se percató que no tenían las medidas solicitadas.*

S: ¿Recuerdas por qué usamos la circunferencia en el trazo de los triángulos?

Y: No sé.

S: Traza una circunferencia de 7 cm de radio, elige un punto sobre la circunferencia y mide la distancia que hay de ese punto al centro de la circunferencia.

Yamil traza la circunferencia con ayuda.

Y: Con la regla, son siete.

S: Toma otro punto sobre la circunferencia y mide la distancia al centro.

Y: Siete igual.

S: Eso es lo que es una circunferencia, son todos los puntos que se encuentran a la misma distancia del punto que se llama centro.

Y: ¡Ah! Esta es la razón por la que se puede hacer un triángulo de 7 sin hacer el segmento.

2. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 8?

Lee la pregunta en voz alta y dice “un triángulo es base por altura, ¿no?”

S: ¿Qué quiere decir el perímetro?

Y: Sacar la medida.

S: ¿La medida de qué?

Y: No sé.

S: Como ejemplo, se traza un triángulo equilátero de 7 cm de lado. ¿Cuánto miden los lados de este triángulo?

Y: 7

S: El perímetro es la suma de la medida de todos los lados de un triángulo.

Y: 7 por 7.

S: ¿Por qué?

Y: No sé.

S: Imagínate que el triángulo es un terreno y lo vas a bardear. ¿Cuántos metros de barda necesitas? 7 de aquí, más 7 del otro lado, más 7 del tercer lado, son $7+7+7$. Ahora, ¿cuál es el perímetro de un triángulo con lados 8, 4 y 3?

Y: 15.

3. Traza el triángulo del inciso anterior.

Yamil trazó un segmento de 8 cm; después, trazó una circunferencia de 3 cm con centro en un extremo y otra de 4 cm con centro en el otro extremo y pregunta, “¿si se puede formar el triángulo?” Sola se responde “creo que no”.

S: No, ¿por qué?

Y: Porque no se van a poder juntar.

S: La semana pasada platicamos este resultado. ¿Qué características deben tener tres segmentos para que con ellos se pueda formar un triángulo?

Y: Ah, que sea mayor.

S: ¿Quién debe ser mayor?

Y: Los dos juntos tienen que ser mayores que el 8.

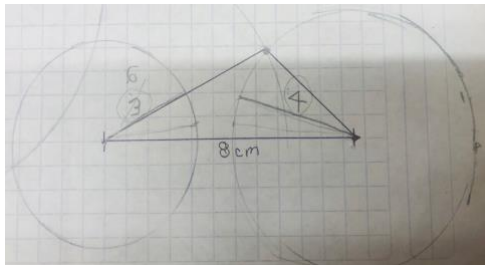
S: Cambia uno de estos dos para que sí se pueda formar un triángulo.

Yamil cambió el 3 por el 6.

Al final trazó el triángulo de la primera pregunta en la parte de atrás de la hoja.

Figura 70

Trazos de Yamil en la Actividad 8 Ejercicio 5.



Resultados de las Interferencias en la Fase I

Tabla 3

Interferencias observadas en la Fase I.

Id.	Descripción	Categoría
F1-S1-I1	Yamil le arrebató el trabajo a Mactzil. Nicté le dice: N: Yamil, respeta.	Interacción entre las adolescentes

	S: A ver, les quiero decir dos cosas, primero, es que estamos aquí porque queremos estar y la segunda es que lo que sea que diga cualquiera de nosotros se respeta. Las invito a que hagamos un ambiente de respeto, cordialidad y ayuda. Por ser mujeres creo que sí lo podemos lograr. Vamos a querernos, ayudarnos y respetarnos.	
F1-S1-I2	S: Ahora pueden, por favor, escribir detrás de su hoja de qué se acuerdan o qué piensan. ¿Qué es un triángulo? Pueden hacer dibujos. A: ¿Puedo sacar mi cuaderno? S: No. Después de que las adolescentes escriben su definición, estas se anotan en el pizarrón. Yamil: es una figura geométrica de tres lados iguales. Nicte: figura geométrica con dos lados iguales y uno diferente.	Conocimientos previos
F1-S1-I3	S: Les traje una copia de este documento a cada una. ¿Alguien quiere leer? Y: Yo. N: No, porque Yamil lee como velociraptor. S: Quedamos que aquí todas nos queremos y nos apreciamos.	Interacción entre las adolescentes
F1-S1-I4	Mientras trabajaba con Yamil y su compañera, Nicte se da vuelo haciendo cosas en GeoGebra. Trabaja en la computadora de manera brusca y desordenada, y la lleva a una situación caótica, aleja y acerca las cosas sin sentido. S: Te voy a pedir un favor, vamos a manejarnos en este espacio del plano, porque no podemos ver las cosas como lo estás haciendo. Además, esta es mi herramienta de trabajo y la	Entorno del aula

	necesito cuidar mucho. Nicté se muestra incómoda con la solicitud y cambia su actitud.	
F1-S1-I5	Se traza una pareja de rectas que se cruzan y son perpendiculares y otra recta que cruza con la primera recta y no es perpendicular y se pregunta, ¿cuál es la diferencia entre estas rectas? Y: La diferencia es la distancia. S: ¿Cuál es la distancia? Y: Terminan en punto medio. S: ¿Qué es el punto medio? Yamil no responde.	Conocimientos previos
F1-S1-I6	S: Ya sabemos lo que son rectas paralelas, rectas perpendiculares, qué es un segmento y una recta. Al principio hablamos de qué era un triángulo, recuerdo que una de ustedes dijo que era una figura de tres lados iguales y otra dijo que era una figura de dos lados iguales. N: Pero es que hay triángulos diferentes. S: ¿Cómo pueden ser los lados de un triángulo? Y: Isósceles tiene dos lados iguales y triángulo rectángulo. S: Nicté, ¿cómo se llaman los que tienen los tres lados iguales? N: Yo con la geometría soy muy mala.	Conocimientos previos
F1-S2-I1	Al llegar a la CH, las adolescentes estaban viendo una película, lo cual no favoreció el inicio de la sesión. Nicté estaba muy seria y apática, en un momento se paró y se fue al baño. Yamil comentó que estaban viendo una película y que por eso Nicté “está un poquito de mal humor”.	Entorno del aula
F1-S2-I2	Para trazar un triángulo, Yamil fija la abertura del compás utilizando la regla y dice: Y: Va a ser muy grande, es muy raro (se refiere al compás). No me gusta trazar los círculos con el compás.	Interacción entre las adolescentes

	N: Es que no lo sabes usar. S. Trata de girarlo de aquí (<i>en referencia a que coloque la mano en el extremo que se fija en el centro</i>). N: A mí me encantan los compases. S: Yamil, lo que necesitas es darle vuelta al compás con la confianza de que no se va a mover. Después de que hayas trazado las circunferencias, toma uno de los puntos de intersección y traza el triángulo. Y: Estas son las cosas que no me gustan. S: Yo detengo la punta del compás. Y: Ay, no. <i>Para que Yamil pueda realizar la actividad, se le apoya en el trazo de cada circunferencia sujetando la punta del compás en la hoja. Situación que se repitió cada vez que trazó una circunferencia.</i>	Conocimientos previos
F1-S2-I3	Se escucha una voz que anuncia la colación. Les pido que tracen el triángulo antes de ir a la colación para no interrumpir la sesión.	Entorno del aula
F1-S3-I1	La sesión se planeó para realizar una actividad con las adolescentes; después, se impartiría una conferencia a toda la comunidad. Al final, las adolescentes aplicarían la actividad de la desigualdad del triángulo a sus compañeras de la casa hogar. Sin embargo, la actividad empezó únicamente con Yamil, porque Nichte estaba hablando con la directora por una situación delicada.	Entorno del aula
F1-S3-I2	Para trazar un triángulo escaleno de lados 9, 7 y 5. Yamil trazó un segmento de 9 cm, después con la regla localizó al tanteo el tercer lado del triángulo. Se le pidió que midiera los lados, cuando se percató que el triángulo no tenía las medidas	Conocimientos previos.

	solicitadas, se reforzó el procedimiento de trazo de triángulos con regla y compás y se le apoyó en el manejo del compás. S: Trata de trazar la circunferencia. Y: Noo, no puedo. S: Para trazar la circunferencia, recuerda que necesitas poner la punta del compás en el centro, yo te ayudo a detenerlo y tu dale vuelta al compás. A continuación se revisó el procedimiento para trazar un triángulo equilátero de 7 cm de lado. Yamil trazó un segmento de 7 cm y después las circunferencias de 7 cm en cada extremo. S: A ver te ayudo, pon el compás derecho y dale vuelta. Yamil marcó el punto de intersección y unió ese punto con los extremos. Se le pidió que verificará que el triángulo era equilátero. S: Recuerdas ¿por qué usamos la circunferencia? Y: No S: Elige un punto sobre la circunferencia y mide la distancia que hay de ese punto al centro de la circunferencia. Y: Con la regla 7. S: Toma otros puntos sobre la circunferencia y mide su distancia al centro. Y: 7 igual. S: Eso es lo que es una circunferencia, son todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de este punto que se llama centro. A: ¡Ah! Esta es la razón por la que se puede hacer un triángulo de 7 sin hacer el segmento.	
--	--	--

F1-S3-I3	S: En la segunda pregunta, Yamil lee: “¿Cuál es el perímetro de un triángulo con lados 8, 4 y 3?” y dice “un triángulo es base por altura, ¿no?” S: ¿Qué quiere decir el perímetro Yamil? A: Sacar la medida. S: ¿La medida de qué? Y: No sé. S: El perímetro es la suma de la medida de todos los lados de un triángulo. ¿Cuál es el perímetro de este triángulo? <i>(En referencia a un triángulo equilátero de 7 cm de lado que se había trazado).</i> Y: 7 por 7. S: ¿Por qué? Imagínate que es un terreno y le vas a poner una barda. ¿Cuántos metros de barda tengo que poner? 7 de aquí, más, 7 del otro lado, más, 7 del tercer lado. Y: 7 por 7. S: Sumamos $7+7+7$. Y: 21. S: Entonces “Cuál es el perímetro de un triángulo con lados 8, 4 y 3”. Y: 15.	Conocimientos previos
F1-S3-I4	En la planeación de la sesión se contempló impartir una conferencia a todas las chicas de la casa hogar. Después de la conferencia, Yamil implementaría la actividad de la desigualdad del triángulo con sus compañeras de la casa hogar. En la conferencia participaron 15 niñas o adolescentes que se mostraron muy interesadas. Yamil no pudo aplicar la actividad porque como maestra se volvió sumamente autoritaria y enojona. No dejaba que las niñas se movieran y las regañaba o gritaba si tocaban algo.	Interacción entre las adolescentes

	Nicte se integró a la sesión ya iniciada la conferencia, tenía los ojos rojos. Cuando Yamil empezó a implementar la actividad se volvió sumamente agresiva, les gritaba a sus compañeras y no dejaba que se movieran. Nicte se refirió a Yamil y le dijo “¿tú que te sientes?” Le expliqué que yo le había pedido que me ayudara, a lo cual Nicte respondió “¿pero por qué nos habla así?” Se modificó la planeación y la docente aplicó la actividad porque el ambiente se estaba volviendo muy hostil.	
--	---	--

Conclusiones de la Fase I

Nicte

Al inicio del trabajo en las Actividades Nicte mostró evidencia de no haber construido el Objeto triángulo, lo que se observa en la descripción de la interferencia (F1-S1_I2) donde se expone que la definición que escribió del triángulo es imprecisa. Las construcciones de Nicte en el desarrollo de las Actividades 4, 5 y 6 son evidencia de que ha construido el concepto de triángulo y su clasificación con respecto a sus lados como Acción. Para el trazo de triángulos, trabajó con regla y compás, comenzando siempre por trazar los segmentos que formaran el triángulo de manera horizontal. Luego, utilizó esos segmentos como guía para ajustar la apertura del compás. Sin el apoyo de los segmentos, no pareció poder construir un triángulo. En la Actividad 7 se percibió un cambio significativo, lo que sugiere que Nicte pudo haber interiorizado la clasificación de triángulos con respecto a sus lados como un Proceso: en la construcción de triángulos equiláteros con el material, argumentó que pudo hacer 4 “vi 4 colores rojo, verde, azul y amarillo y cada uno tiene 3 palos”. En lo referente a los triángulos isósceles, escribió que eran doce, “cada uno tendrá dos lados iguales y uno diferente”. Respecto a los triángulos escalenos, describió los triángulos de lados diferentes que se podían formar con el material sin necesidad de manipularlo, lo que evidencia de que ha construido el triángulo escaleno como Proceso.

La evaluación de la Actividad 8 evidencia que Nichte ha interiorizado el trazo de triángulos con regla y compás, y la clasificación de triángulos de acuerdo con sus lados como Procesos que coordina. Sin embargo, como ya se mencionó cuando se le solicitó dibujar cualquier triángulo, necesitó trazar primero los segmentos que forman el triángulo de manera horizontal. En el tercer inciso, para trazar el triángulo de lados 3, 4 y 8, Nichte trazó los tres segmentos horizontales; sobre el segmento de longitud ocho, trazó una circunferencia de radio tres en un extremo y otra de radio cuatro en el extremo opuesto, al hacerlo, se dio cuenta de que no podía completar el triángulo. Borró el arco de circunferencia de radio tres e intentó con otro de radio cuatro, pero tampoco le resultó útil, por lo que borró de nuevo y trazó un arco de circunferencia de radio cinco. Finalmente, escribió que no es posible trazar el triángulo, su argumento fue “no cierra”. Nichte cometió algunos errores al responder preguntas; por ejemplo, en el segundo inciso de la evaluación, calculó el perímetro del supuesto triángulo sumando 3, 4 y 8, y escribió 16. Su respuesta es evidencia de que construyó la desigualdad del triángulo como Acción. En esta fase Nichte mostró dificultades para trabajar de manera colaborativa.

Yamil

Al inicio del trabajo en las Actividades Yamil mostró evidencia de no haber construido el Objeto triángulo, según la descripción de la interferencia (F1-S1_I2). El desarrollo de las Actividades 4 y 5 da evidencia de que Yamil no ha construido el trazo de triángulos como Acción. Inició su trabajo trazando triángulos mediante el método de ensayo y error, y se mostró reacia a utilizar la regla y el compás a pesar de que, al medir los triángulos dibujados, las longitudes de los lados no correspondían a lo solicitado. Durante el trazado de triángulos isósceles, su compañera Nichte le explicó cómo trazó el triángulo. Posteriormente, Yamil empleó la regla y el compás, replicando el procedimiento de manera precisa, incluso dibujando los segmentos horizontales auxiliares que había trazado Nichte. En la siguiente actividad, Yamil trazó un triángulo escaleno con regla y compás, esta vez sin el apoyo de los segmentos horizontales. Yamil mostró dificultades en la coordinación al usar el compás.

En la Actividad 7, en la pregunta sobre cuántos triángulos equiláteros se pueden construir con el material de la bolsa, Yamil argumentó que podía construir “4 por que son 4 colores y cada

color tiene 3 piezas”. Al preguntarle cuántos y cuáles triángulos isósceles podían formarse con el material, respondió que cuatro, justificando su respuesta como “por el número de piezas”. Describió los posibles triángulos como “RRV, VVR, MMA, AAM” (R-rojo, V-verde, A-amarillo y M-morado). Tras contar y describir en grupo los triángulos isósceles que podrían construirse, Yamil se dio cuenta de que podía construir dos triángulos escalenos con el material y los describió.

En la evaluación de la Actividad 8, Yamil comenzó el trazado del triángulo con lados 5, 9 y 7 utilizando el método de ensayo y error. Se revisó nuevamente el procedimiento de trazado de triángulos con regla y compás, así como la justificación del uso de la circunferencia. En la última pregunta de la misma actividad, dibujó un segmento de 8 cm, en uno de sus extremos una circunferencia de 3 cm y en el opuesto una de 4 cm. Se dio cuenta de que no era posible construir un triángulo con esas dimensiones y, sin dudar, sustituyó la circunferencia de 3 cm de radio por una de 6 cm.

El trabajo de Yamil evidencia dificultades para realizar las acciones requeridas en las actividades. Además, muestra complicaciones en la coordinación al usar el compás y no ha construido conceptos básicos que se construyen en la educación primaria, como es el perímetro de una figura. A menudo responde con ideas que recuerda o ha escuchado, aunque no las comprende. Sin embargo, se percibe un ligero cambio en su respuesta a la última pregunta, que podría sugerir la construcción de la desigualdad del triángulo como Acción.

4.2.2 Resultados de la Fase II

El concepto de ángulo forma parte de los conocimientos previos declarados en la descomposición genética. Sin embargo, las adolescentes de la población estudiada no habían construido este concepto, tampoco sabían cómo medir un ángulo ni cómo utilizar el transportador. Esto se tuvo que reconstruir durante la intervención. A continuación, se presentan los resultados de las actividades realizadas por las adolescentes en la Fase 2.

Actividad 1

Nicte

- a) ¿Qué es un ángulo?

Un ángulo es un semicírculo interno de alguna figura.

- b) ¿Qué es un grado?

Es la medida del semicírculo.

- c) ¿Qué es un ángulo recto?

Es un semicírculo en una recta.

- d) ¿Qué es un ángulo llano?

No sé.

Yamil

- a) ¿Qué es un ángulo?

No me acuerdo.

- b) ¿Qué es un grado?

Es la medida de un ángulo cualquiera.

- c) ¿Qué es un ángulo recto?

Un ángulo recto es aquel que mide 180° .

Dibujo

- d) ¿Qué es un ángulo llano?

No me acuerdo.

Las respuestas al cuestionario inicial hicieron evidente que las adolescentes no habían construido el objeto ángulo. En las respuestas de Nicte se aprecia que relaciona el ángulo con el arco de circunferencia con el que se indica y escribió “es el semicírculo interno de alguna figura”. Yamil escribió “no me acuerdo”. Un concepto necesario para la construcción de otros conceptos es el ángulo recto, en este caso, Nicte lo relacionó con “el semicírculo de una recta”, es probable que con el ángulo que se forma en una línea recta. Yamil, por su parte, lo declaró como: “es aquel que mide 180° ”.

Actividad 2

Nicte

- a) Traza un triángulo equilátero, mide sus ángulos interiores, suma los ángulos interiores.

Trazó un triángulo equilátero de cinco cm de lado con regla y compás, midió los ángulos interiores y escribió sobre cada uno 120° . La suma de las medidas fue 360° . (Ver Figura 71).

- b) Traza un triángulo isósceles y mide sus ángulos interiores.

Trazó un triángulo isósceles de lados 10, 12 y 12 cm con regla y compás. Midió los ángulos interiores, 58° , 67° y 64° . No los sumó.

- c) Traza un triángulo escaleno y mide sus ángulos interiores.

Trazó un triángulo escaleno de lados 3, 4 y 5 cm con regla y compás. Midió los ángulos 180° , 50° y 40° , valor que corrigió a 36° . La suma de los ángulos 272° .

Yamil

- a) Traza un triángulo equilátero, mide sus ángulos interiores y suma la medida de los ángulos.

Trazó un triángulo de tres cm de lado utilizando únicamente la regla y para medir los ángulos interiores, tomó el transportador, lo colocó haciendo coincidir el centro del segmento de la base del triángulo con el centro del transportador y localizó el tercer vértice sobre el transportador. Marcó los ángulos con un arco, pero no los midió.

- b) Traza un triángulo isósceles, mide sus ángulos interiores y suma la medida de los ángulos.

Trazó un triángulo isósceles con regla. Primero, trazó un segmento horizontal de cinco unidades, ubicó el punto medio y arriba de éste trazó el tercer vértice al tanteo, escribió sobre sus lados 4, 5 y 5 cm. Las medidas reales son 4, 3.7 y 4.7 cm. No marcó los ángulos, ni los midió (Ver Figura 72).

- c) Traza un triángulo escaleno, mide sus ángulos interiores y suma la medida de los ángulos.

No trazó el triángulo escaleno.

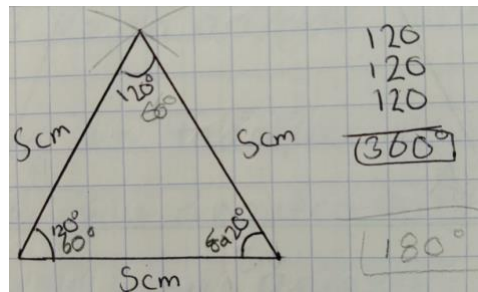
El trabajo de esta actividad evidencia que las adolescentes no han construido el concepto de ángulo, grado, y no saben utilizar el transportador. En la sesión se realizó la acción de trazo y

medición de ángulos. Se revisó el concepto de grado y el uso del transportador, se reconocieron ángulos rectos, llanos y de 360° .

Después de discutir el concepto de ángulo y de realizar Acciones de trazo y medición de ángulos, Nigte midió de nuevo los ángulos de los triángulos que había trazado de manera incorrecta y corrigió las medidas. *Escribió con lápiz la corrección y la suma que se observa en la Figura 71.*

Figura 71.

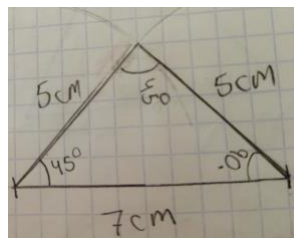
Trazo de Nigte del triángulo equilátero que incluye la medida de los ángulos interiores.



Yamil repitió la actividad desde el inicio, trazó el triángulo equilátero con regla y compás. Midió los ángulos y escribió 60° sobre cada uno y comentó “entonces un triángulo equilátero siempre va a medir la misma cantidad de ángulos”. Después trazó el triángulo isósceles de lados 7, 5 y 5 cm, con regla y compás, midió sus ángulos y escribió las medidas 45° , 45° y 90° en ángulos que no correspondían (Figura 72).

Figura 72

Trazo de Yamil de triángulo isósceles con medida de los ángulos interiores.



Actividad 3

Determina la medida del ángulo marcado en color rojo en cada figura.

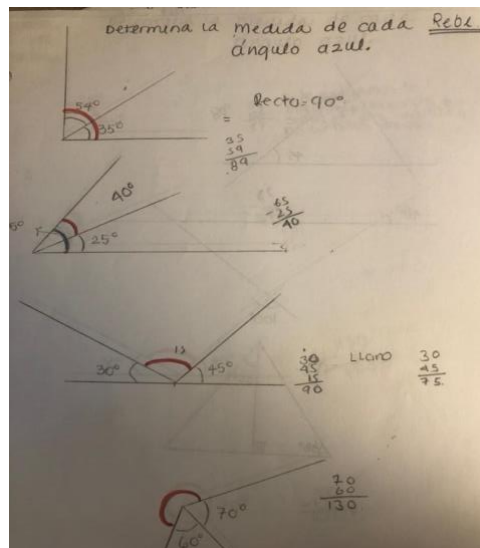
- ¿Qué relación guarda el ángulo rojo con los ángulos conocidos?
- Explica: ¿cómo determinas el valor del ángulo rojo en cada caso?

Nicte

En la Figura 73 se presenta el trabajo de Nicte en la Actividad 3. En el inciso a) sumó los ángulos y en el inciso b) los restó. En el inciso c) se presentan tres ángulos suplementarios, uno de los cuales es desconocido. Nicte mencionó “esto me gustó a mí. Yo primero sumé estos dos para ver cuánto me daba y conté cuánto me faltaba para completar este (se refiere al ángulo marcado en rojo). Este mide 15° ”. Se le preguntó “¿para completar qué?” Respondió: “para completar 90° , ¡no! eran 180° ”. En el último inciso se presentan tres ángulos que suman 360° , dos de los cuales son conocidos. Nicte únicamente sumó los ángulos conocidos.

Figura 73.

Respuesta de Nicte a la Actividad 3.



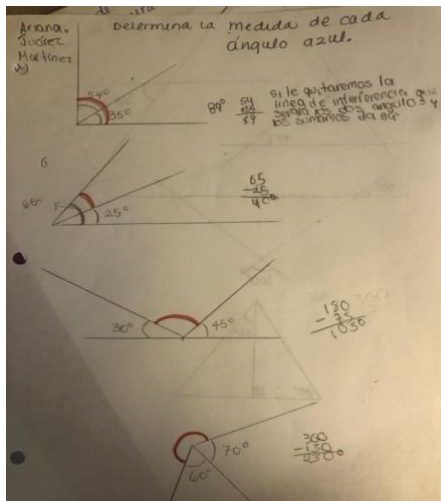
Las respuestas de Nicté muestran que se encuentra en la transición a la construcción de ángulos suplementarios como Acción, aunque comente errores aritméticos, como es escribir 90° en lugar de 180° o no terminar los ejercicios.

Yamil

En la Figura 74 se presenta el trabajo de Yamil en la Actividad 3. En el inciso a) escribió “si le quitamos la línea de interferencia que separa los dos ángulos y los sumamos da 89° ”. En el inciso b) restó los ángulos. En el inciso c) sumó los ángulos conocidos y escribió la resta de 180° menos 75° ; obtuvo como resultado 105° . En el último inciso sumó los ángulos conocidos, los restó de 360° y obtuvo 230° .

Figura 74

Respuesta de Yamil a la Actividad 3.



En el trabajo de Yamil se observa que ha construido la Acción de reconocer la relación de la medida de un ángulo a partir de la posición que ocupa respecto a otros ángulos de medida conocida; en particular, muestra evidencia de que ha construido la noción de ángulos suplementarios como Acción.

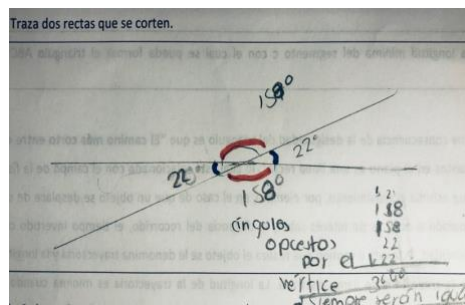
Actividad 4

La actividad solicita trazar una pareja de rectas que se crucen, reconocer los ángulos entre ellas, medirlos y describir la relación entre ellos. Después, se pide dibujar otro par de rectas que se crucen y verificar si la relación entre los ángulos es la misma que en el primer caso.

En la Figura 75 se observa que Nicté trazó dos rectas, midió los ángulos entre éstas y escribió sobre aquellos 158° , 22° , 157° y 20° .

Figura 75

Respuesta de Nicté a la Actividad 4.



Yamil trazó dos rectas, midió los ángulos entre estas y escribió 37.5° , 143° , 37.5° y 142.5° .

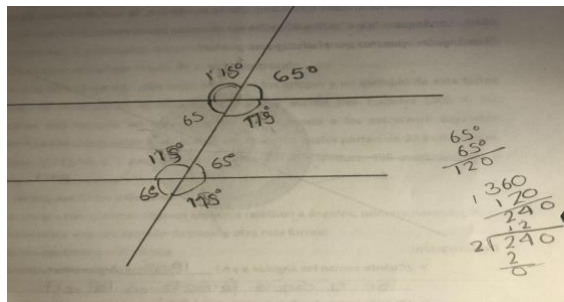
Ambas adolescentes tomaron las medidas de los ángulos de manera incorrecta. En la sesión se revisó nuevamente el uso del transportador, se rectificaron las medidas de los ángulos y se observó que hay dos parejas de ángulos iguales. Se definieron los ángulos opuestos por el vértice y se demostró la propiedad de la igualdad entre ellos. En ese momento Yamil comentó: “ah, no importa la posición en qué están colocados, siempre los ángulos así van a medir lo mismo”. Este comentario puede indicar que Yamil está en el camino a la construcción de una Acción con respecto al reconocimiento de la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice, pero todavía no hay suficiente evidencia de ella.

Actividad 5

Esta actividad se trata del reconocimiento de los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una secante y su relación. En este caso, se sabe que la medida de uno de los ángulos es de 65° y a partir de ello se deben determinar la medida de los ángulos restantes. Como se observa en la Figura 76, Nichte marcó todos los ángulos que miden 65° , después sumó $65^\circ + 65^\circ$, de lo que obtuvo 120° , lo que restó de 360° y dividió entre 2. Se le pidió que explicara su procedimiento, cuando lo verbalizó se dio cuenta de que había cometido un error.

Figura 76

Respuesta de Nichte a la Actividad 5.

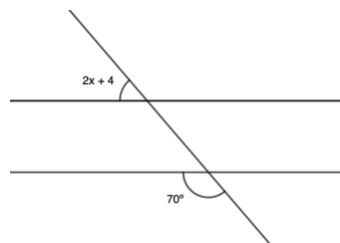


El contexto en los diálogos

Durante la resolución de la Actividad 5 inciso 4, se solicita encontrar el valor de x en la Figura 77.

Figura 77

Rectas paralelas cortadas por una secante.



S: Nos piden encontrar el valor de x . ¿Qué se les ocurre hacer a ustedes para encontrar x ?

N: Una ecuación.

S: ¿Con qué información podemos escribir la ecuación?

N: No sé.

S: Primero, necesitamos reconocer la relación entre los ángulos. Marquen del mismo color los ángulos que son iguales al ángulo de 70° y díganme: ¿cuánto miden los otros ángulos? *Ver Figura 78.*

N: 180.

S: Juntos miden 180.

Y: El otro mide 110°

S: ¿Con esto podemos plantear la ecuación?

Y: Sí, $2x + 4 = 110$

S: ¿Saben resolver la ecuación?

Y: Sí, acabo de ver ecuaciones en la escuela.

N: $2x + 4 = 110$.

S: Tenemos que despejar x, es decir, dejar solita a x, para ello resto 4 de ambos lados y después dividido entre 2.

N: x es igual a 53. Sin propiedad no hay forma de resolverlo.

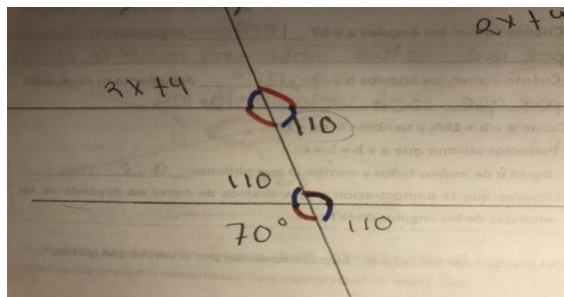
Y: Yo no hago toda la operación, no quito ni pongo, voy viendo números, 50 no puede ser porque 50 por 2 me da 100.

N: Miss no soy tan mala en las ecuaciones.

Figura 78

Trabajo de

Nicte en la Actividad 5 Inciso 4.



Si bien el trabajo de Nicte parece evidenciar que ha construido los ángulos entre paralelas cortadas por una secante como una Acción, reiteradamente comete errores aritméticos. Por otro lado, Yamil parece preferir utilizar estrategias diferentes a las estudiadas en las sesiones.

Actividad 6

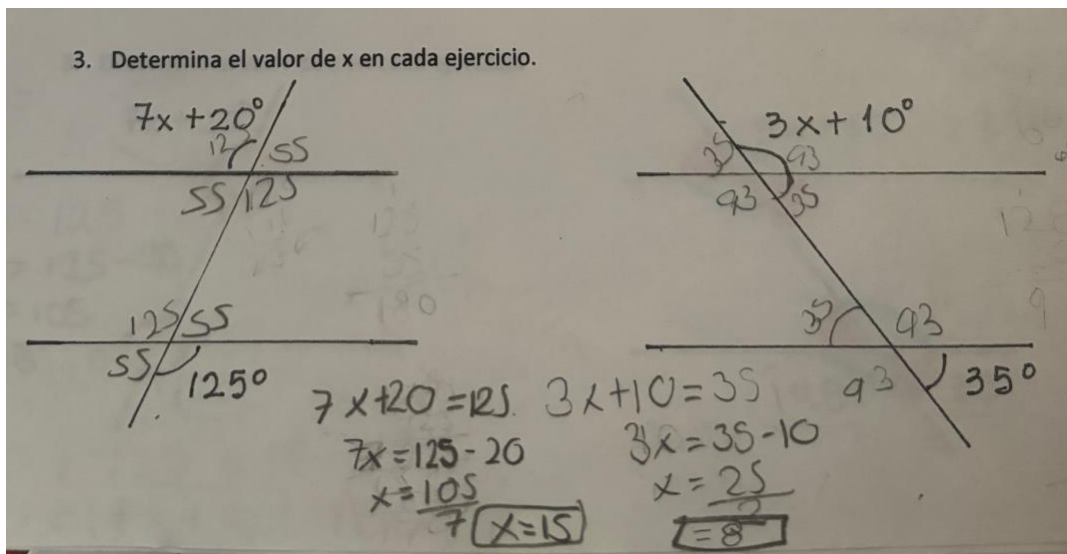
En esta actividad se presenta una evaluación de conceptos relacionados con el reconocimiento de la relación de la medida de un ángulo con respecto a otros ángulos, de la medición de ángulos interiores de un triángulo y de la determinación de las medidas de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.

Nicte

Nicte no parece sentirse segura de las operaciones que realiza en los primeros ejercicios. Repite las operaciones varias veces, lo cual se aprecia en todo lo borrado en el documento. En el segundo inciso midió de manera imprecisa dos de los tres ángulos interiores del triángulo. En la Figura 76 se observa el trabajo de Nicte en el Ejercicio 3 que está integrado por dos incisos, en el lado izquierdo, Nicte identificó la relación entre los ángulos del problema, información que utilizó para plantear una ecuación y resolverla. En el mismo ejercicio, determinó el valor del ángulo suplementario al de 125° , a pesar de que este dato no era necesario para la solución del problema. En contraposición, al resolver el ejercicio del lado derecho, aplicó de manera mecánica el mismo método que en el ejercicio del lado izquierdo, igualando los datos del problema y planteando una ecuación, a pesar de que los datos del problema se relacionan de diferente manera. Cometió diversos errores al resolver la ecuación que planteó: copió mal los números y escribió que el resultado de dividir 25 entre 2 es 8. En el margen, realizó la resta de $128^\circ - 35^\circ$ resultando 93° , valor que escribió como ángulo suplementario a 35° , aunque no queda claro de dónde obtuvo el 128° . El ejercicio del lado izquierdo del tercer inciso podría evidenciar que Nicte ha construido y coordinado el Proceso de ángulos suplementarios y el Proceso de ángulos opuestos por el vértice, puesto que usa ambos conceptos para determinar la medida de x . Sin embargo, la resolución del ejercicio del lado derecho del mismo inciso es evidencia de que no ha construido los ángulos entre paralelas cortadas por una secante como Acción.

Figura 79

Respuestas de Nicte a la Actividad 6 Ejercicio 3 Incisos a) y b).



Yamil

Yamil empezó la evaluación y se quedó paralizada.

S: Los primeros ejercicios los resolviste muy bien.

Y: Pero ya se me olvidó.

S: Pláticame, ¿qué quieres hacer?

En relación con el primer ejercicio:

Y: Calcular el valor de este ángulo, pero si este lo quitamos.

S: Tienes 3 ángulos, ¿cuál quitamos?

Y: Pero quiero calcular esto, no sé la verdad, la otra vez lo hice nada más así, rápido, viéndolo.

S: Conozco el ángulo grande y el ángulo chico.

Y: Sumándole, ¿verdad?

S: ¿Tú crees?

Y: Entonces restándole.

S: A poco.

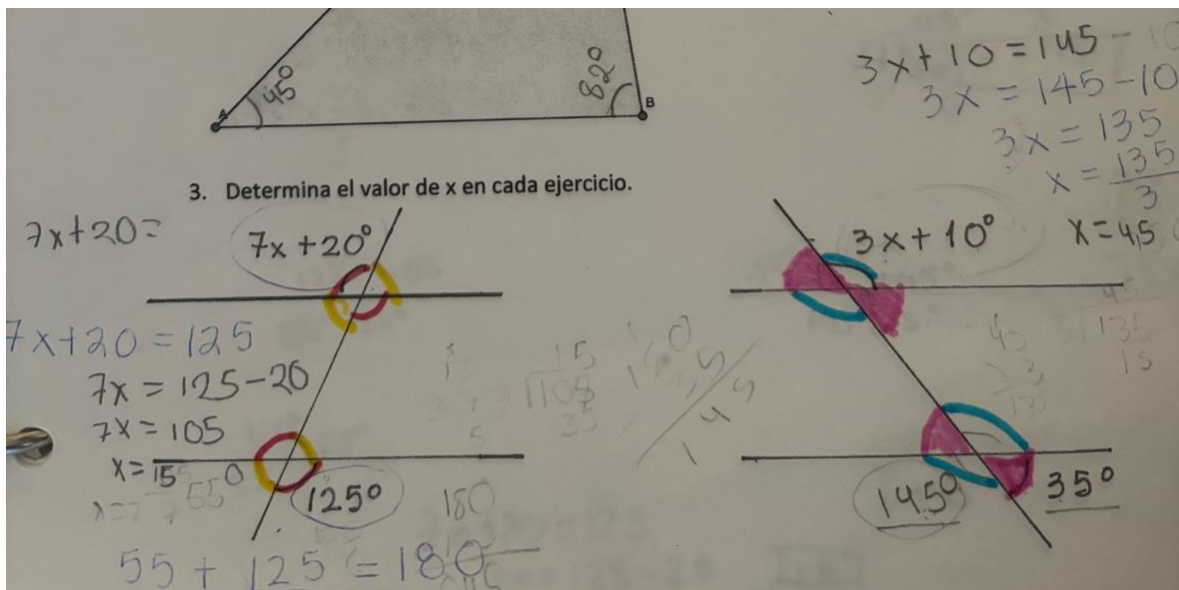
Y: No sé, me dudo mucho.

Como se observa en la Figura 80, Yamil resuelve todos los ejercicios con acompañamiento, escribe algunas operaciones que luego decide borrar, a pesar de que se le solicita no hacerlo. En el segundo inciso necesitó ayuda para medir los ángulos con el transportador. El tercer ejercicio lo realizó con acompañamiento, marcando del mismo color los ángulos iguales, planteando y

resolviendo las ecuaciones. El trabajo de Yamil revela que no construido la relacion que hay entre los ángulos formados entre rectas paralelas cortadas por una secante como Acción. A menudo mencionó que los ejercicios le parecen muy difíciles y que no recuerda nada, lo cual sugiere que no ha construido las Acciones necesarias para realizar estas tareas.

Figura 80

Respuesta de Yamil a la Actividad 6 Ejercicio 3 Incisos a) y b).



El contexto en los diálogos

A los quince minutos de iniciada la sesión llegó Dzan, una adolescente que nunca había asistido. Se integró al grupo e intentó responder los ejercicios de la Actividad 6.

D: Yo no me acuerdo de esto, la verdad, hace mucho que no lo veo.

Y: No te preocupes, yo la otra vez lo vi y no me acordé.

D: No, no me acuerdo.

S: ¿De ninguno?

D: No.

S: En el segundo lo que tienes que hacer es medir los ángulos.

D: Yo no me acuerdo de esto, la verdad. No tengo nada para medir.

S: No te preocupes, que aquí te prestamos todo.

N: Ya acabé.

Nicte terminó el examen en 15 minutos, al parecer la llegada de Dzan presionó a Nicte a entregar el examen rápido.

Nicte (a Dzan): ¿no te acuerdas lo que es un ángulo?

D: No, no me acuerdo de nada. Yo nunca vi ángulos, bueno, sí, pero en quinto. No me acuerdo si en cuarto o quinto.

N: Yo me acuerdo de que en tercer año llevaba geometría y me aburría hasta el alma. Bueno, nomás porque teníamos que armar figuras y armamos un triángulo de 16 caras y lo daba la directora, y lo hacías o te sacaba. Entonces, todo el mundo lo hacía.

D: Nunca vi nada de geometría, nunca me dieron esa materia.

N: Mira, aquí tienes el transportador, entonces lo colocas así.

D: Ah, eso sí sé.

Al mismo tiempo que se le daba acompañamiento a Yamil, Nicte le explicó a Dzan todo el examen.

En el primer ejercicio:

N: Eso es un ángulo llano, recto, ¿cuánto debe medir? ...aquí solo hacemos una operación $75 - 28 = 47$. *En un momento duda y checa el resultado con lo que hizo Yamil.*

En el segundo ejercicio:

N: Cuando tienes aquí esto, vamos a dar una vuelta de 365° .

S: 360° .

Para explicar lo que es un ángulo de 360° , Nicte dibujó un segmento de recta. Tomó dos lápices y con ellos simuló el ángulo.

N: Aquí tenemos que darle la vuelta completa a este y son 360° . Tenemos que ver cuánto suma esto, más esto, más esto...

Dzan hizo la suma mental y dijo:

D: $150^\circ + 120^\circ$.

N: Ya sabemos cuánto es la suma y todos estos suman 270° , ¿cuánto nos falta para 360° ?

D: 90° .

N: Porque la suma de todo para dar 360° . Esto fue fácil. *Se salta el ejercicio 2 y se va directamente al ejercicio 3 sobre ángulos entre paralelas cortadas por una secante.* Esto es un ángulo opuesto al vértice, porque todos los ángulos opuestos al vértice van a medir igual. Entonces este va a medir lo mismo. Va a ser muy fácil. Aquí tiene el 125° , entonces lo recorres.

D: ¿A este?

N: No a ese no, chica, recuerda la posición, son dos ángulos opuestos por el vértice. Aquí este y este siempre van a medir lo mismo. Entonces cada que lo recorres arriba también va a medir lo mismo. Como lo recorriste va a quedar lo mismo aquí que acá.

D: ¡No!

N: ¿Cómo te lo puedo explicar? Tenemos estas dos líneas y te digo que vas a recorrer esta línea para acá y ¿dónde queda el 125 aquí?

D: Este estaba abajo.

N: ¿Aquí van a quedar uno y el otro? Este se pasa para acá y este queda acá abajo. A ver, explícamelo tú.

D: Este se pasa para acá y este para acá.

N: Aquí está tu ángulo, este es el único ángulo que tienes. Y se pone en los ángulos opuestos por el vértice. Si este lo recorres para arriba, ¿dónde queda el 125? Este va a ser Juanito, entonces Juanito se va a pasar con Menchito. Este ¿va a medir igual que este? Ahora, ¿cómo se llama el ángulo que mide de aquí a acá? Es un ángulo llano y mide 180°

D: ¿185?

N: No, 180° . Entonces 125 para 180. *Hace la resta en voz alta.* Entonces este ángulo va a medir 55° , que es lo faltante a este. Entonces si este mide igual que este, este va a medir igual que este. Y si recorrimos la línea, este va a medir igual que ¿cuál? ¿Dónde queda el 125° ? ¿Ya viste? Así de fácil. *Anotan los ángulos 125° y 55° en cada ángulo.* Pero en el examen nos preguntan el valor de x. Entonces planteamos la ecuación. Ahora, si vamos a hacer la ecuación, $7x + 20$ es igual a 125. Entonces, ¿cómo se hace una ecuación? ¿Qué quiero despejar? x, ¿no? Si está sumando pasa...

D: Restando.

N: x es igual a..., si a 125 le restas 20 ¿cuánto te queda?

D: 105.

N: Como el 7 está multiplicando, pasa dividiendo. Ahora sí, haz tu operación. 105 se divide entre 7, ¿qué te queda? ¿Cuántas veces cabe el 7 en el 10? ¿Y te sobra?

D: 3.

N: Ahora, ¿cuántas veces cabe el 7 en el 35? Yo siempre me voy por el 5, vamos a ver, ¿cuántas veces caen?

D: 7 veces.

N: No, porque 7 por 7 es 49. Cabe 5 veces. Ahora este. *Se refiere al último problema.* Esta fácil, Dzan, no te hagas bolas, estos están arriba y estos abajo. Lo de arriba pasa arriba. ¿El ángulo cuánto mide?

D: Es un llano, 180° .

N: Si a 180° le quitas 35° , ¿cuánto mide? Si a 145° le sumas 35° , ¿qué te da?

D: 180°

N: Ahora despéjame x...

D: 145° , entonces este lo pasas para acá.

N: Si a 145° le quitas 10, ¿qué te queda?

D: 135.

N: Ahora lo divides entre 3.

Hacen la división en voz alta.

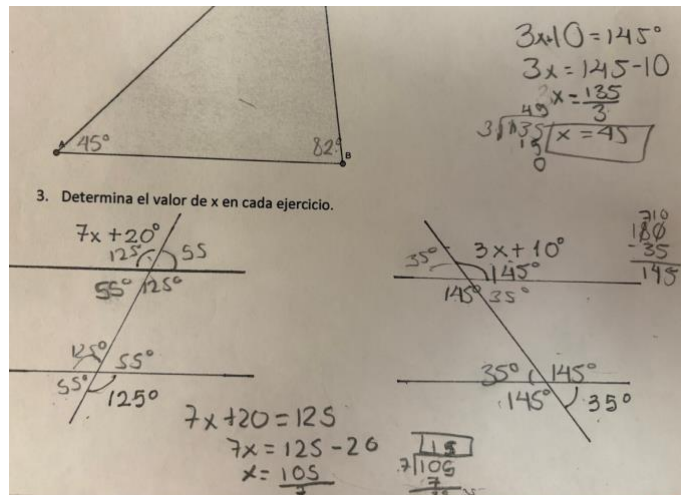
D: Y ahora, ¿qué le hago a esto?

N: Solo escríbelo y ya terminaste. Fácil, así.

Después de los ejercicios Nichte le presentó a Dzan la demostración de por qué los ángulos opuestos por el vértice son iguales. En la explicación de Nichte, como se observa en la Figura 81 destaca que el último ejercicio, que había respondió de manera incorrecta, lo resolvió bien cuando lo hizo con Dzan.

Figura 81

Explicación de Nichte a Dzan de la Actividad 6 Ejercicio 3 Incisos a) y b).



Actividad 7

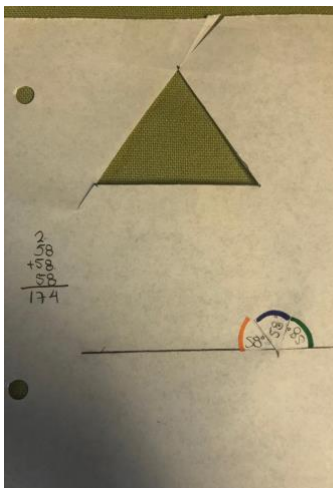
Ángulos interiores de un triángulo

- Nigte trazó un triángulo equilátero con regla y compás, midió los ángulos interiores y escribió sobre cada uno de ellos 62° , de la suma obtuvo 186° .
 - Yamil trazó un triángulo escaleno con regla y compás, midió los ángulos y anotó 131° , 28° y 23° . De la suma obtuvo 182° .
 - Dzan trazó un triángulo equilátero, midió los ángulos 58° , 58° , 58° cuya suma escribió 174° .
- Nigte preguntó “¿cómo es posible que a Dzan le dio 58° y a mi 62° ?”

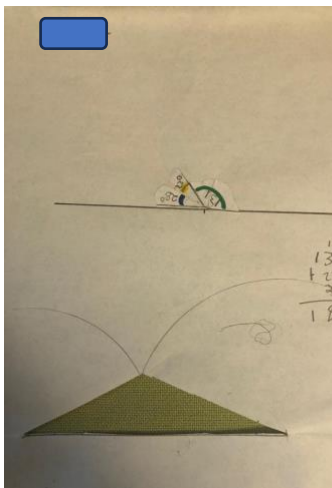
Las adolescentes llevaron a cabo la actividad marcando los ángulos interiores con diferentes colores. Luego, recortaron el triángulo y sus ángulos. A continuación, trazaron una línea recta y un punto sobre ella, colocaron los ángulos del mismo lado de la recta de tal manera que sus vértices coincidieran en el punto señalado. Para su sorpresa, al completar el ejercicio, descubrieron que la suma de los tres ángulos era de 180° y que habían tomado mal la medida de los ángulos.

Figura 82

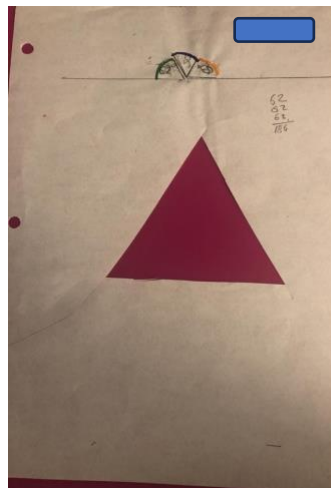
Trabajo realizado por las adolescentes en la Actividad 7.



Dzan obtuvo una suma de 174°



Yamil obtuvo una suma de 182°



Nicte obtuvo una suma de 186°

Para hacer la demostración del teorema, se realizó la acción de dibujar un triángulo y duplicarlo en otra hoja. La demostración de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° se hizo por medio de doblado de papel. Esta sesión se llevó a cabo en un día festivo. Durante la demostración de la propiedad, además de Nicte, Yamil y Dzan, había ocho niñas más alrededor de la mesa, todas atentas a la actividad. Cada una de ellas trazó un triángulo e hizo la demostración.

Actividad 8

Esta actividad propone tres ejercicios que involucran el concepto de la suma de ángulos interiores de un triángulo y su coordinación con los ángulos opuestos por el vértice.

Nicte

El trabajo de Nicte da evidencia de que ha construido los ángulos opuestos por el vértice y la suma de los ángulos interiores de un triángulo como Acción. A lo largo de sus ejercicios, resolvió cada problema utilizando procedimientos formales, planteando y resolviendo, en cada caso, una ecuación que involucraba la suma de los tres ángulos interiores, lo que evidencia la interiorización en un Proceso. En el segundo ejercicio coordinó los ángulos opuestos por el vértice con la suma de

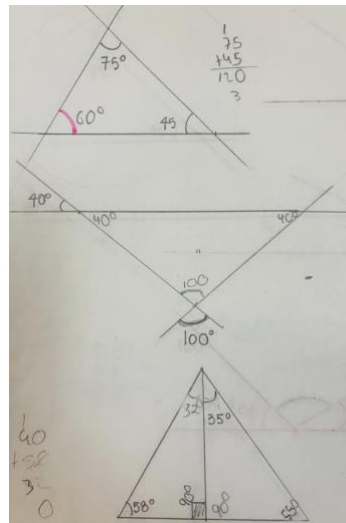
ángulos interiores de un triángulo para determinar la medida del ángulo faltante del triángulo. En el tercer ejercicio, aplicó la suma de ángulos interiores de manera independiente a cada triángulo.

Yamil

El trabajo de Yamil da evidencia de que coordina el Proceso de ángulos opuestos por el vértice con el Proceso de la suma de ángulos interiores de un triángulo. Como se observa en la Figura 83, en el primer ejercicio, sumó los ángulos conocidos y calculó mentalmente el ángulo faltante para sumar los 180° . En el segundo ejercicio, identificó los ángulos opuestos por el vértice de los ángulos conocidos y realizó nuevamente el cálculo mental para determinar el ángulo que faltaba. En el tercer ejercicio, determinó que el ángulo faltante en el triángulo del lado izquierdo era de 32° , lo cual comprobó sumando los ángulos al margen, aunque luego borró la operación. Por último, en el triángulo del lado derecho del tercer ejercicio realizó la resta de 180° menos 125° , obteniendo 65° , aunque escribió 55° , que era la respuesta correcta.

Figura 83

Respuestas de Yamil a la Actividad 8.



Actividad 9

Ejercicios de la guía de COMIPEMS

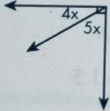
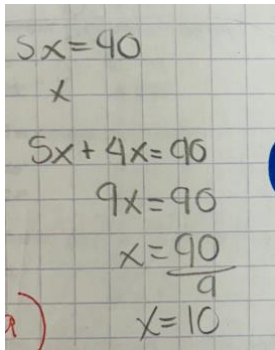
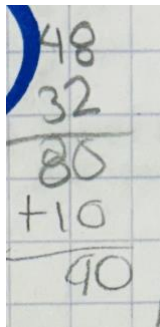
Los ejercicios evalúan ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante y la suma de ángulos interiores de un triángulo, así como la coordinación de estos conceptos.

Nicte

Nicte se sentía cómoda en el examen, de repente gritaba cosas como “genial”, “¡oh! Dios está conmigo”. Como se observa en la Figura 84, el trabajo de Nicte en los ejercicios 1, 2, 3 y 4 da evidencia de que ha construido los ángulos complementarios y suplementarios como Acción, puesto que los utilizó para resolver los ejercicios. Se observa que, para la resolución de ecuaciones, hizo por separado las operaciones de los términos semejantes que tienen x ; después, regresó con este resultado a la ecuación. Cometió errores aritméticos, por ejemplo, en el inciso 4, escribió que la resta de $180-22+4$ es 72, lo que la llevó a no poder resolver la ecuación.

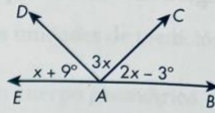
Figura 84

Grupo de respuestas de Nicte en la Actividad 9.

Ejercicio	Actividad 9	Procedimiento de Nicte
1	Observa la siguiente figura y de acuerdo con ella, ¿cuál es el valor de x?  a) 10° c) 50° b) 40° d) 59°	
2	Observa la siguiente figura. De acuerdo con ella, ¿cuál es el valor de x?  a) 10° c) 32° b) 20° d) 56°	

3

Observa la siguiente figura. De acuerdo con ella, ¿cuál es la medida de $\angle CAD$?

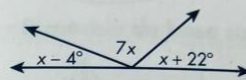


- a) 29° c) 55°
b) 38° d) 87°

$$\begin{aligned} x + 9 + 3x + 2x - 3 &= 180^\circ \\ 2x + 3x + x &= 6x \\ 6x + 9 - 3 &= 180 - 9 + 3 \\ 6x &= 174 \\ x &= \frac{174}{6} \\ x &= 29 \end{aligned}$$

4

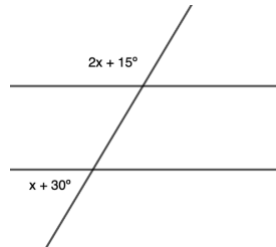
Observa la siguiente figura. De acuerdo con ella, ¿cuál es el valor de x ?



- a) 23° c) 12°
b) 18° d) 9°

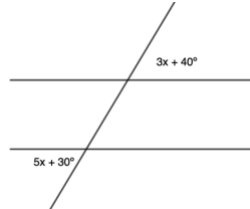
$$\begin{aligned} 9x + 22 - 4 &= 180 \\ 9x &= 180 - 22 + 4 \\ x &= \frac{162}{9} \\ x &= 18 \end{aligned}$$

5



$$\begin{aligned} 2x + 15 + x + 30 &= 180 \\ 2x + x &= 3x \\ 3x &= 180 - 30 - 15 \\ x &= \frac{135}{3} \\ x &= 45 \end{aligned}$$

6



$$\begin{aligned} 3x + 40 + 5x + 30 &= 180 \\ 3x + 5x &= 8x \\ 8x &= 180 - 40 - 30 \\ x &= \frac{110}{8} \\ x &= 13.75 \end{aligned}$$

El trabajo de Nicté sugiere que ha interiorizado la Acción de la suma de ángulos interiores de un triángulo como un Proceso. Esto se evidencia en la resolución mental de los ejercicios 7 y 8, en este último, argumentó “solo sumé $40 + 110$ que son 150 y vi que le faltan 30 para 180 . Luego vi que había una trampa porque hay dos ángulos que sumados dan 180 , pero no sabía cuánto medían, así que solo le sume 150 al de adentro”.

Yamil

Yamil se quedó viendo al vacío. Después de un rato, empezó a marcar respuestas. De vez en cuando, decía “no puedo, no me sale” o “me fastidia hacer operaciones cuando no me salen”.

Cuando escribía alguna operación en la hoja, la borraba de inmediato, a pesar de que se le pidió que por favor no lo hiciera. Al terminar los ejercicios se dio el siguiente diálogo.

S: No entiendo, ¿cómo llegaste a estos resultados?

Y: Pero yo sí.

S: A ver, explícame.

Y: No sé si estoy bien, pero mira.

1. 10 por 5 da 50, 10 por 4 da 40, $50 + 40$ da 90 y ya.
2. Solo sume las cantidades y vi cuánto le faltaba, pero sin hacer tantas operaciones.
3. Yo lo hice de “ave María, dame puntería”, porque no me gustan las operaciones.
4. *Se revisó con Yamil el problema 3, después ella resolvió el ejercicio 4.*

Y: Yo no sé hacer esos. Lo veo y lo veo y no me sale.

S: Estos tres suman 180° .

Y: Si lo hice así, pero no me dio.

S: Estaba viendo tu hoja, aquí hay una operación que borraste y fíjate cuál fue el problema, te saltaste uno de los ángulos.

5. Son 2 por 45, me da 90; más 15, me dan 105; y 45 más 30, me da 75. Suma $105 + 75$, me da 180.
6. *Reconoció la relación entre los ángulos y dijo:*

Y: Este y este es el mismo, 3 por 5 es 15, más 40 son 55, y también 5 por 5 más 30 me da 55.

7. Lo resolvió de manera mental.
8. Nichte le explicó a Yamil cómo resolvió el ejercicio.

Y: No le entendí.

S: ¿Cuál es el ángulo de 30° ?

Y: Ah, nada más es completar el ángulo, entonces el que falta es 150. Ponen muchas trampas en este examen.

Yamil se resistió a escribir las operaciones y las borró cuando lo hacía. En la escuela le enseñaron a sustituir los valores de las posibles respuestas para encontrar la solución de los

ejercicios, y utiliza este procedimiento al enfrentar problemas similares a los del examen que presentará. Su razonamiento sugiere que está en camino a la construcción de los ángulos complementarios y suplementarios como Acción. Sin embargo, se aprecia la construcción de ángulos formados entre paralelas cortados por una secante como Acción. Ha construido la suma de ángulos interiores de un triángulo como Acción, lo cual se evidencia en la solución de los ejercicios 7 y 8 que resolvió de manera mental.

Resultados de las interferencias Fase II

Tabla 4

Interferencias observadas en la Fase II.

Id.	Descripción	Categoría
F2-S1-II	Las adolescentes no habían construido el concepto de ángulo y tampoco sabían cómo medirlo. No sabían utilizar el transportador. Se discutió el concepto de ángulo y su medición, se trazaron ángulos que se midieron con el transportador. La actividad inicio con el trazó de un triángulo equilátero de 5 cm y la medición de sus ángulos interiores. Nicté trazó el triángulo con regla y compás, después tomó el transportador, midió los ángulos y escribió sobre cada uno 120°. La suma de los tres fue 360°. Después, trazó un triángulo isósceles con regla y compás de lados 10, 12 y 12, las medidas de sus ángulos interiores fueron 64°, 67° y 58°, no los sumó (la suma es 189°). Por último trazó un triángulo escaleno de lados 5, 4 y 3 cm. Los ángulos que midió en este triángulo fueron 180°, 36° y 50°, cuya suma es de 272°. En este punto, Yamil seguía trazando los triángulos únicamente con regla, para lo cual primero trazaba un segmento horizontal como base, ubicaba el punto medio y arriba marcaba	Conocimientos previos

	el tercer vértice al tanteo. Para que los trazara con regla y compás se le ayudó a sostener el compás de la punta. Para medir los ángulos colocaba el transportador haciendo coincidir el centro del segmento de la base del triángulo con el centro del transportador y veía donde se ubica el vértice opuesto.	
F2-S1-I2	La sesión coincidió con un puente escolar, lo cual implicó que en la CH estaban todas las chicas de la población. La sesión se llevó a cabo en el mismo lugar con mucho ruido e interrupciones. En la mesa, junto con 3 adolescentes que trabajaban en las actividades, estaba Mía, una niña de primaria que resolvía su tarea e interrumpía el trabajo para hacer comentarios o preguntas.	Entorno del aula
F2-S2-I1	Al inicio se aplicó el cuestionario que incluía tres ejercicios sobre ángulos. Cuando las adolescentes respondían el cuestionario, llegó una adolescentes que nunca se había presentado a las sesiones porque asistía a la escuela por las mañanas. Dzan también iba a presentar el examen de ingreso al nivel medio superior. La presencia de Dzan presionó a Nichte, quien se precipitó a entregar el examen y respondió mal los ejercicios. Dzan se integró a la sesión e intentó resolver los mismos ejercicios, sin embargo, dijo: “No me acuerdo de nada. Yo nunca vi ángulos, bueno sí, pero en quinto”; “Nunca vi nada de geometría, nunca me dieron esa materia”. Ante esta situación, Nichte le explicó todo lo que se había visto de ángulos en la sesión anterior, incluyendo la demostración de los ángulos opuestos por el vértice. En esta ocasión Nichte respondió los ejercicios de manera correcta.	Interacción entre las adolescentes.
F2-S2-I2	Cuando estábamos trabajando en una actividad sobre el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, la	Entorno del aula

	pedagoga de la casa hogar interrumpió la sesión para que las adolescentes fueran a tomar la colación. Las chicas estaban muy enganchadas con la actividad y una de ellas dijo “pero si acabamos de desayunar”.	
F2-S2-I3	La demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulos se hizo con doblado de papel, en ese momento había 3 niñas sentadas trabajando en la actividad y 8 niñas alrededor de la mesa. Todas quisieron hacer la actividad.	Entorno del aula.

Conclusiones de la Fase II

Nicte

El trabajo de Nicte muestra evidencia de que ha construido el concepto de ángulos opuestos por el vértice como Proceso, puesto que los usa cuando los necesita; en particular, para resolver problemas de ángulos entre paralelas cortadas por una secante y en problemas de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Nicte resuelve las actividades de una manera ortodoxa, en la mayoría de los casos escribe las operaciones o plantea ecuaciones de manera mecánica y las resuelve. Durante el desarrollo de la Actividad 6 se sucitó la interferencia (F2-S2-I1), en la cual Nicte explicó a Dzan el concepto de ángulos, cómo medirlos, ángulos complementarios, suplementarios, ángulos opuestos por el vértice incluyendo la demostración formal y ángulos entre paralelas cortadas por una secante. Esta explicación podría ser evidencia de que los conceptos mencionados se han interiorizado en un Proceso, puesto que la explicación se realizó sin recurrir a sus notas. Nicte comete errores aritméticos frecuentemente, pero su trabajo en las actividades 8 y 9 da evidencia de que ha construido la suma de ángulos interiores de un triángulo como un Proceso el cual coordina con el Proceso de ángulos opuestos por el vértice.

Yamil

En el desarrollo de las actividades, Yamil mostró problemas de coordinación motriz en el uso del compás y del transportador lo cual se evidencia en la interferencia (F2-S1-I1). Por otro

lado, los ejercicios de la Actividad 9, en la que se reponen ejercicios tipo de la guía de estudio para ingresar al nivel medio superior, ofrecen cuatro posibles soluciones de las que se debe elegir una. En sus respuestas, Yamil utilizó frecuentemente el método de ensayo y error, sustituía los valores de las posibles respuestas para elegir la solución. Yamil se niega a escribir operaciones. A pesar de esto, su trabajo da evidencia de que ha construido el concepto de ángulos complementarios y suplementarios, al igual que de ángulos opuestos por el vértice como Acción. De igual forma construyó la relación de los ángulos entre paralelas cortadas por una secante como Acción. Yamil presenta problemas en la formalización. Sin embargo, construyó la suma de los ángulos interiores de un triángulo como Proceso, lo que se evidencia en las respuestas a las últimas dos preguntas de la evaluación de la Actividad 9.

4.2.3 Resultados de la Fase III

Actividad 1

En esta actividad se evalúa el conocimiento previo de las adolescentes sobre triángulos rectángulos. En el tercer inciso se evalúan la construcciones sobre suma de ángulos interiores que han realizado las adolescentes.

Nicte

1. ¿Qué es triángulo rectángulo?

“No me acuerdo”.

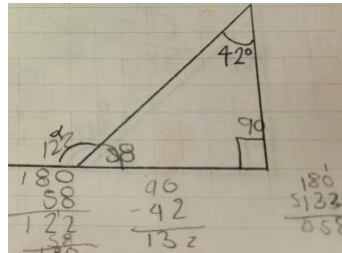
2. ¿Puede un triángulo tener dos ángulos rectos?

“No sé”.

3. a) Para determinar la medida del ángulo α Nicte sumó los ángulos que conoce y restó este valor de 180° , aunque borró las operaciones. Como se aprecia en la Figura 85, en el inciso b) sumó los ángulos que conocía, valor que restó de 180° , pero cometió errores aritméticos en la resta ($180-32=58$). Reconoció que este valor es la medida del ángulo interior que faltaba en el triángulo y que a su vez es un ángulo suplementario del valor que buscaba, hizo la resta y escribió el resultado.

Figura 85

Respuestas de Nichte a la Actividad 1 Ejercicio 3 Inciso b).



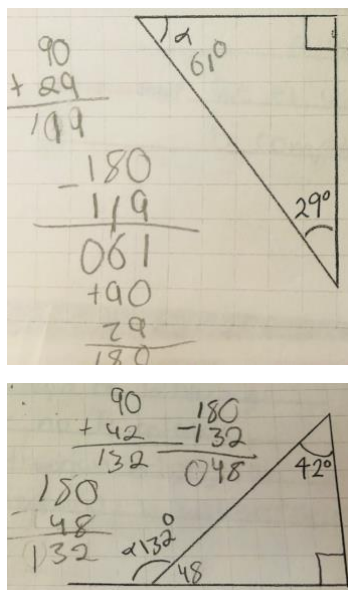
En el Ejercicio 3 de la Actividad 1, Nichte ratificó que ha construido el concepto de ángulos suplementarios y la suma de ángulos interiores de un triángulo como Acción. En su trabajo, cometió errores que podrían ser producto de la intención de precipitarse para terminar el trabajo antes que su compañera.

Yamil

1. ¿Qué es triángulo rectángulo?
“No sé”.
2. ¿Puede un triángulo tener dos ángulos rectos?
“No, porque no se formaría”.
4. Yamil hizo operaciones y no las borró. Su trabajo es evidencia de que ha construido la noción de ángulos suplementarios y la suma de los ángulos interiores de un triángulo como Acción. Como se observa en la Figura 86 en el inciso a) Yamil realizó la suma de los ángulos conocidos, valor que restó de 180 y comprobó su resultado con la suma de los tres ángulos. En el inciso b), realizó el mismo procedimiento y lo complementó calculando el ángulo suplementario.

Figura 86

Respuestas de Yamil a la Actividad 1 Ejercicio 3 Inciso a) y b).



El trabajo de Yamil es evidencia de que no ha construido el concepto de triángulo rectángulo como Acción, puesto que no da una definición del mismo. Sin embargo, en el Ejercicio 3 da evidencia de que ha construido la noción de ángulos suplementarios y la suma de ángulos interiores de un triángulo como Acción.

Actividad 2

Se proporcionó el desarrollo plano de una caja rectangular sin tapa y se les pidió a las adolescentes recortarlo e incluir pestañas para poder pegarlo.

El contexto en los diálogos

N: Recuerdo que yo hacía esto demasiado en geometría.

S: No es necesario hacer pestañas en la parte de arriba porque es una caja sin tapa.

N: No importa, a mí me gusta hacerlo aunque no lo pegue.

Y: No sé usar las tijeras. De verdad que no soy buena para cortar, me estreso más cortando.

No sé qué estoy haciendo, ¿cómo lo hago? Tampoco soy buena para construir.

S: Ya le mochaste un cacho a tu caja.

Y: Ja, ja, ja.

N: Tengo manos de chorlito.

S: No se hablen así a ustedes mismas.

N: Es que mis manos son muy grandes y no alcanzo a aplicarlas.

S: Nicté, ¿puedes leer el problema?

N: Una mosca y una hormiga están paradas al mismo tiempo en el interior de una caja en el punto marcado con la letra A. Ambas se desplazan al punto B, la hormiga camina por la caja y la otra va por el aire. ¿Cómo va por el aire?

Y: Si la mooosca.

N: Miss cómo hizo su mosca, le salió perfecta.

S: Usé de modelo la que anda por aquí.

N: Listo, miss, ya está.

S: Pueden marcar el punto A y el punto B sobre la caja y, sin hacer cálculos, díganme, ¿quién recorre mayor distancia?

N: Yo digo que lo mismo porque es la misma distancia.

S: Hay diferentes caminos, a cada camino lo llamaremos trayectoria. Con un plumón tracén las trayectorias que recorre cada una.

N: Yo digo que en diagonal.

Y: La mosca vuela y pum. La hormiga tiene que ir pum, pum, pum. *Recorre con su pluma las aristas.*

S: Tenemos las medidas de la caja, 7 de largo, 4 de ancho y 3 de altura.

Y: ¿Si lo hacemos en forma de ecuación?

N: Pues me voy por la altura. No sé, miss, esto está muy difícil.

Y: Serían 14 cm.

S: ¿De quién?, ¿de la hormiga o la mosca?

Y: No sé, pero mire, por la diagonal serían $7+3 = 10$. La diagonal mide 10. ¡Ah!, es un triángulo. 14, porque $7 + 4 + 3$.

S: Ya tenemos la longitud de una trayectoria. Pueden encontrar otra trayectoria en que la hormiga recorra una distancia menor.

N: Yo sigo diciendo que por la diagonal.

S: Puedes trazarla y decirme, ¿cuánto mide esa trayectoria?

N: 12.

Y: No, serían igual, la misma cantidad 14.

N: No, porque esta (*se refiere a la diagonal*) está evitando la esquina. Forma un triángulo rectángulo.

S: Entonces, ¿qué es un triángulo rectángulo? Hace ratito me dijiste que no sabías.

N: Un rectángulo que se puede dividir en triángulos.

S: Es una forma bonita de decirlo, un triángulo rectángulo es lo que resulta de dividir un rectángulo en dos triángulos.

Y: Yo nunca lo había pensado. Ah, es encontrar el valor del cateto.

S: Y ¿qué es eso de cateto?

A: Es que mi profesor me dijo que este se llama A porque es la medida más chica, luego este es el cateto b, y este es el cateto c y para encontrarlas, yo tenía que sumar $a+b$ y es el resultado del c.

N: Eres muy rara.

Y: Déjeme ver mi cuaderno, lo acabamos de ver en la escuela.

S: No, por favor, no lo hagas. El triángulo que tiene un ángulo de 90° se llama triángulo rectángulo. Se dibuja un triángulo rectángulo y se pregunta, ¿cuáles son los lados que forman el ángulo de 90° ?

Y: a y b.

S: Ellos se llaman catetos y el otro lado se llama hipotenusa.

N: ¿De qué me están hablando?

S: Son solo nombres, cuando tenemos un triángulo con un ángulo de 90° , a los lados que forman el ángulo de 90° se les llaman catetos y al otro lado se le llama hipotenusa.

N: Ay, miss, yo no sé.

S: A la hipotenusa siempre se ponemos de nombre c. ¿Se acuerdan lo que habíamos platicado de la desigualdad del triángulo? Si lo aplicamos al triángulo rectángulo, la hipotenusa siempre va a ser más chica que la suma de las otras dos, y en el caso de la mosca y la araña, la mosca siempre va a recorrer una distancia menor.

Y: La distancia que recorrería la mosca serían 11 cm.

S: ¿Por qué 11 cm?

N: Yo no sé de qué están hablando.

S: Nichte, vamos a quedarnos con esta idea, siempre que tengamos un triángulo que tenga un ángulo de 90° , los lados que forman el ángulo de 90° se llaman catetos y el otro lado se llama hipotenusa.

En esta actividad Nichte realizó Acciones empíricas de corte y construcción de la caja. Reconoció triángulos rectángulos en el trazo de las trayectorias, sin embargo, cuando Yamil se adelantó a hablar de catetos e hipotenusa, se bloqueó, dijo y repitió en varias ocasiones que no sabía de qué se estaba hablando. Nichte no ha construido el triángulo rectángulo como Acción, ya que lo definió como un rectángulo dividido en dos triángulos, pero no verbalizó que es un triángulo con un ángulo recto.

Por otro lado, las Acciones empíricas de construcción de la caja pusieron de manifiesto la falta de coordinación de Yamil, situación que ya se había presentado en el uso del compás y el transportador. En esta ocasión, fue con el uso de las tijeras en el momento de recortar y construir la caja. Yamil argumentó que en la escuela ya había estudiado triángulos rectángulos, y asociaba a ellos el teorema de Pitágoras, el cual recordaba de manera errónea. Yamil no ha construido el triángulo rectángulo como Acción.

Actividad 3

1. Las adolescentes iniciaron la actividad midiendo los ángulos interiores de los triángulos presentados.

Y: Yo ya me confundí cómo medir los ángulos.

Se revisó de nuevo el uso del transportador. Después, se les preguntó: ¿cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? A coro contestaron que 180° . Se solicitó comprobar que la suma de los ángulos que midieron era 180° .

Tabla 5

Medidas de los ángulos interiores de los triángulos de la Actividad 3.

Triángulo	Nichte	Yamil
-----------	--------	-------

Primero	Midió y escribió 73°, 46° y 61°. Sumó y ajustó el tercer ángulo a 62°.	Midió y escribió 73°, 45° y 62°. Hizo la suma 37+45+62 = 144. Dijo: “aquí está mal, no me da 180. ¡Ah! Ya vi, cambié el 73 por 37”.
Segundo	Midió y escribió 80°, 63° y 38°. Sumó y ajustó el último ángulo a 37°.	Midió y escribió 80°, 62 y 38°.
Tercero	Midió y escribió 90°, 37 y 52°. Sumó y ajustó la medida del segundo ángulo a 38.	Midió y escribió 90°, 37 ° y 53°. Yamil borró las operaciones a pesar de que se le pidió que no lo hiciera.

La siguiente acción consistió en medir la longitud de los lados de cada triángulo.

Tabla 6

Medidas de los lados de los triángulos de la Actividad 3.

Triángulos	Nicte	Yamil
Primero	10, 9.2 y 7.4	9.9, 9.2 y 7.5
Segundo	10, 9 y 6	10, 9 y 6
Tercero	10, 8 y 6	10, 8 y 6

Llamaron **c** al lado de mayor en longitud y **a** y **b** a los otros dos lados. En grupo, verificamos en qué triángulo se satisface la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Esta relación es el teorema de Pitágoras, el cual dice que “la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”.

Y: Esto solo funciona en los triángulos rectángulos. ¿Pero cómo le hacemos cuando hay números decimales? Está más difícil.

S: Tal vez es un poco más difícil elevar al cuadrado el número decimal, pero lo podemos hacer. En grupo, observamos que el tercer triángulo era el único que satisfizo la relación.

2. ¿Pueden a simple vista ver si alguno tiene un ángulo de 90° ? Ambas lo negaron.

S: Imagínense que no tenemos transportador y queremos saber cuál de esos tres triángulos tiene un ángulo recto.

Y: Yo siento que es este. *Señalando el triángulo de en medio.*

S: Ahora vamos a hacer un ejercicio al revés, vamos a medir los lados y vamos a ver qué triángulos satisfacen que $a^2 + b^2 = c^2$. Midan los lados y verifiquen la relación.

Las adolescentes tuvieron dificultades para hacer las multiplicaciones con decimales. Después, midieron los ángulos y comprobaron que el triángulo cuyos lados cumplía la relación tenía un ángulo de 90° y coincidía con el que estimaron que tenía el ángulo recto. Se mencionó que los triángulos rectángulos satisfacen una relación geométrica y aritmética: en cualquier triángulo que tiene un ángulo de 90° , se cumplen que $a^2 + b^2 = c^2$ y, si tres números cumplen esta relación, podemos asegurar que son los lados de un triángulo que tiene un ángulo de 90° .

3. Se realizó la demostración del teorema de Pitágoras mediante la equivalencia de áreas. Las adolescentes cuestionaron si la demostración se les preguntaría en el examen. En el desarrollo de la demostración, las adolescentes siguieron el razonamiento.

N: Todo eso para ver el teorema de Pitágoras, pero ¿por qué c cuadrado?

S: En la demostración me estoy fijando en las áreas y a partir de ellas puedo llegar a ver la relación.

N: Pero no entiendo por qué le pone los cuadrados. Para mí es lo mismo $a+b=c$, solo que sin el cuadrado.

Se dibujó un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. Se comprobó que $3+4$ no es igual a 5, pero que si lo elevamos al cuadrado, sí se cumplía la relación. Nigte escribió en su cuaderno el teorema de Pitágoras y anotó que solo se satisface en triángulos rectángulos con catetos a y b , hipotenusa c .

Actividad 4

Para resolver los ejercicios, fue necesario abordar la raíz cuadrada. Para ello, se construyó una tabla de cuadrados perfectos. Las raíces cuadradas se aproximaron en función a la cercanía que tenían con algún número de la tabla. Los ejercicios se realizaron en grupo, entre las adolescentes y la ponente.

En el último inciso, se observa que para determinar la altura de un triángulo cuya área es de 9 cm^2 y la base mide la mitad de la altura, Yamil resolvió el ejercicio por ensayo y error, y dijo: “supongamos que la base es 3, la altura sería 6 y como el área del triángulo es base por altura entre 2, entonces sería $6 \text{ por } 3 = 18$, entre dos, da 9. No sé si está bien.”

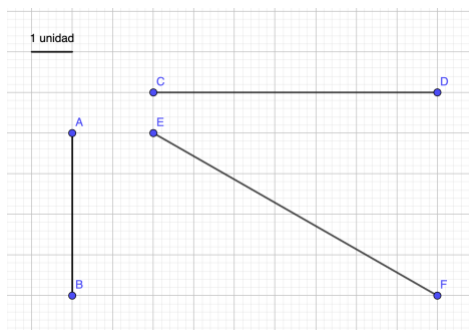
Actividad 5

Evaluación

1. Determina la longitud de los segmentos AB, CD y EF de la Figura 87.

Figura 87

Segmentos AB, CD y EF.



2. ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 unidades respectivamente?
3. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 25 cm y un cateto de 7 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

El contexto en los diálogos

Al inicio de la evaluación, Yamil preguntó:

Y: ¿Cómo que longitud?

S: ¿Se acuerdan de que la longitud es lo que mide un segmento? En el margen dice que la unidad de medida es la longitud de un cuadrito de la cuadrícula de la hoja.

Y: Entonces AB es 4.

Nicte dobló el examen de manera que la cuadrícula le sirviera como regla.

S: La pregunta es, ¿podemos conocer la longitud del segmento EF si no tenemos una regla?

N: Y sin maltratar el examen.

S: Sí pueden maltratar el examen, pero...

N: En COMIPEMS no se puede.

S: Podrían buscar otra forma de hacerlo. *Ambas se quedaron calladas.* ¿Qué vimos la clase pasada?

Y: El teorema de Pitágoras.

S: Y ¿qué dice el teorema de Pitágoras?

Y: ¿Cómo que qué dice?

N: Que $a + b = c$

Y: No, $a^2 + b^2 = c^2$

S: ¿Y quiénes son a, b y c?

Ambas contestan cateto, cateto, hipotenusa.

S: Y esto, ¿dónde se satisface?

Y: En un triángulo.

S: ¿En cualquier triángulo?

N: En un triángulo rectángulo.

S: ¿Podrían construir un triángulo rectángulo con el segmento EF?

Y: Si, ya me di cuenta, mire.

Ambas trazan un triángulo rectángulo con la cuadrícula.

S: ¿Para qué les sirve el triángulo?

Y: Para ver cuántas unidades tiene EF.

S: Nichte, ¿te queda claro?

N: Algo.

S: ¿Cuánto miden los catetos del triángulo que construiste?

N: 16 y 36.

S: ¿Cuánto mide el segmento horizontal?

N: 6

Y: No, 7.

Nichte cambia el 6 por el 7 y repite las operaciones.

S: ¿Cómo sacamos la raíz cuadrada?

Y: Yo estoy haciendo la tabla.

S: ¿Podrías hacerlo en tu mente?

Y: *Contesta rápidamente.* Sí, 8 por 8 son 64, entonces la raíz de 65 es 8.1.

S: Pero en silencio para que dejemos pensar a Nichte.

N: Yo casi le atiné porque puse que era igual a 8, solo me faltó el 0.1.

S: En los siguientes ejercicios es de gran ayuda hacer un dibujo de un triángulo, no necesita ser exacto, solo que nos dé una idea de cómo es ese triángulo.

N: ¿Aunque no sean las medidas?

S: Solo es para que la mente nos diga “ya se por dónde va”.

Nichte

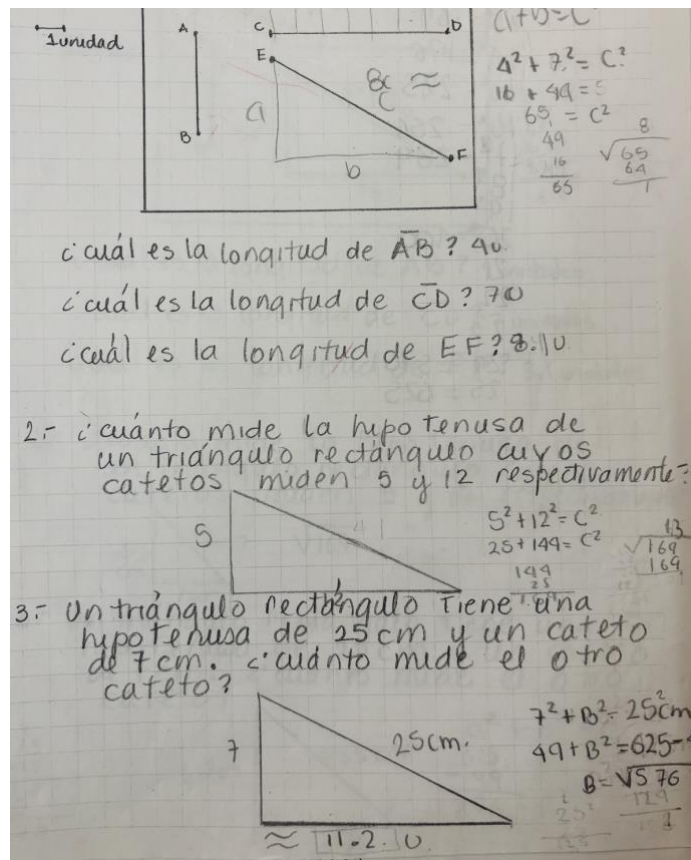
En la Figura 88 se observa que Nichte determinó la longitud de los segmentos horizontal y vertical contando la cuadrícula. Para el segmento inclinado, dibujó un triángulo rectángulo, reconoció los catetos y aplicó el teorema de Pitágoras para determinar la hipotenusa. Aproximó el valor de la hipotenusa construyendo la tabla de cuadrados perfectos trabajada en la sesión anterior.

En la segunda pregunta, trazó un triángulo rectángulo y escribió los valores de los catetos en los lugares correspondientes y los sustituyó en el teorema de Pitágoras. Sacó la raíz cuadrada de 169 con la tabla de cuadrados perfectos que escribió atrás de la hoja.

En la tercera pregunta, trazó un triángulo rectángulo y escribió el valor del cateto y la hipotenusa en el lugar correspondiente, sustituyó en el teorema de Pitágoras y despejó el valor del cateto buscado. Intentó completar la lista de los cuadrados perfectos del 10 al 25. No encontró la raíz cuadrada del número 576 y escribió la respuesta como 11.2.

Figura 88.

Respuestas de Nicta a la evaluación de la Actividad 5.



Yamil

En la Figura 89 se observa que Yamil respondió la primera pregunta contando cuadritos para determina el valor de los segmentos vertical y horizontal. Para el caso del segmento inclinado,

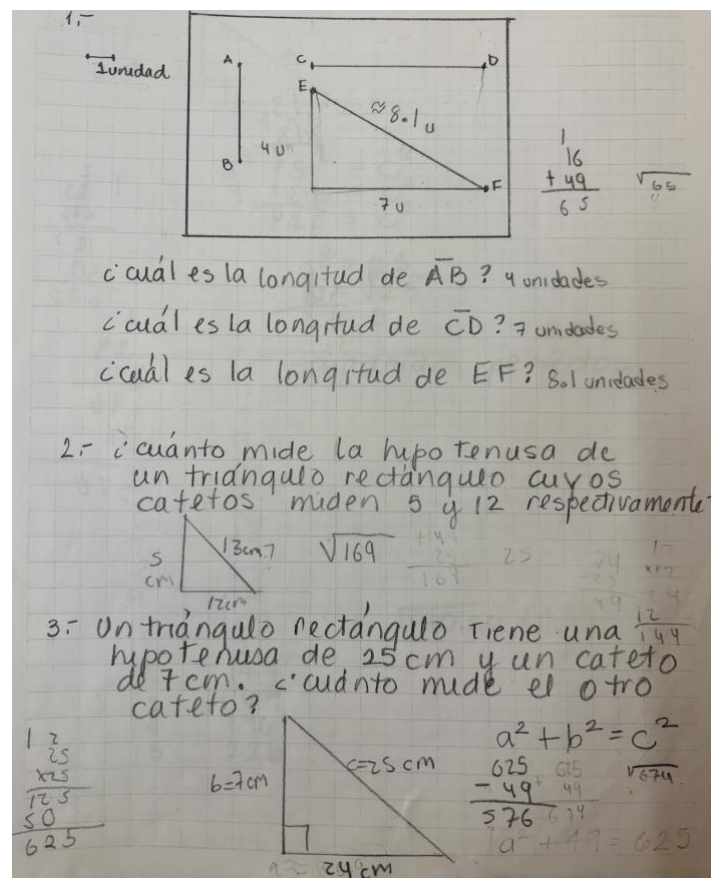
construyó un triángulo rectángulo y aplicó el teorema de Pitágoras, aproximó el valor de la raíz cuadrada de 65 diciendo “si 8 por 8 son 64 entonces la raíz de 65 es 8.1”.

En la segunda pregunta, trazó un triángulo rectángulo y escribió los valores de los catetos en los lugares correspondientes. Aplicó el teorema de Pitágoras y obtuvo de la tabla de cuadrados perfectos que se trabajó la sesión anterior la raíz cuadrada de 169. Yamil borró sus operaciones.

En el tercer ejercicio, Yamil trazó un triángulo rectángulo, escribió la medida sobre el cateto y la hipotenusa. Elevó al cuadrado ambos valores y se puede observar en lo borrado que primero sumó estos valores e intentó sacar la raíz cuadrada de este valor. Después, lo borró y restó los valores. Obtuvo la raíz cuadrada del valor buscado haciendo multiplicaciones en la parte trasera de la hoja.

Figura 89

Respuestas de Yamil a la evaluación de la Actividad 5.



Resultados de las Interferencias en la Fase III

Tabla 7

Interferencias observadas en la Fase III.

Id.	Descripción	Categorías
F3-S1-I1	S: Me gustaría que escribieran: ¿Qué es un triángulo rectángulo? Y: Ay, no, ¿por qué? Es lo que estoy viendo en la escuela, pero no me acuerdo. Nicte escribió “no sé” y Yamil “no me acuerdo”.	Conocimientos previos
F3-S1-I2	Al resolver ejercicios de la guía de COMIPEMS. Y: No puedo. ¿No me quiere explicar de nuevo? S: Sí, pero primero quiero que ustedes lo intenten, después yo voy a resolver los ejercicios, quiero saber de qué se acuerdan, no para calificarlas sino para saber si lo que yo les he explicado ha sido suficiente para que puedan resolverlo. Y: No me sale (y borra el procedimiento). S: No lo borres. Y: No, porque si no me sale, me choca hacer operaciones. S: Me interesaría saber qué escribiste. Y: Me fastidia hacer operaciones.	Entorno del aula
F3-S1-I3	N: Se pueden esperar tantito, me aturde que hablen. S: Hace ratito estaba hablando contigo, ahora estoy hablando con Yamil. Les pido que seamos tolerantes entre nosotras.	Interacción de las adolescentes
F3-S2-I1	Las adolescentes recortaban el desarrollo plano de una caja para la actividad de introducción del teorema de Pitágoras.	Conocimientos previos

	Y: No sé usar las tijeras. De verdad que no soy buena para cortar, me estreso más cortando porque no puedo cortar. No sé qué estoy haciendo. Tampoco soy buena para construir. ¿Por qué me ponen puras cosas que no sé hacer? N: Le mochaste un cacho horrible a tu caja.	
F3-S2-I2	Y: Forman un triángulo rectángulo S: Entonces ¿qué es un triángulo rectángulo? Hace ratito me dijiste que no sabías. N: Un rectángulo que se puede dividir en triángulos. S: Es una forma muy bonita de decirlo, un triángulo rectángulo se forma de la división de un rectángulo en dos triángulos. Y: Yo nunca lo había pensado. Ah, es encontrar el valor del cateto. S: ¿Y qué es eso de cateto? Y: Es que mi profesor me dijo que este se llama A porque es la medida más chica, luego este es el cateto b, y este es el cateto c y para encontrarlas, yo tenía que sumar $a+b$ es el resultado del c. N: Eres muy rara.	Conocimientos previos
F3-S2-I3	S: Los triángulo que tiene un ángulo de 90° se llama triángulos rectángulos. Dibujó un triángulo rectángulo y escribió los nombres a y b en los catetos y c en la hipotenusa. S: ¿Cuáles son los lados que forman el ángulo de 90°? Y: a y b. S: Esos se llaman catetos y el otro lado se llama hipotenusa. N: ¿De qué me están hablando?	Entorno del aula

	S: Son solo nombres, en todos los libros a los lados que forman el ángulo de 90° se les llaman catetos a y b. A la hipotenusa que va con h se le llama c. N: Ay, miss, yo no sé. S: La hipotenusa siempre se llama c. N: Yo no sé, porque no sé de qué están hablando.	
F3-S2-I4	Pedagoga: ¿Qué crees, Yamil? Ya te tienes que ir a cambiar. Y: Ay, no, pérame, pérame, nada más que nos explique esto. S: ¿Yamil te puedes cambiar en 5 minutos? Y: Sí.	Entorno del aula
F3-S2-I5	Y: Mi maestro también me dijo que C es igual a la raíz cuadrada de a cuadrada más b cuadrada. N: Porqué b al cuadrado y porqué a al cuadrado. ¡Por dios! S: No te estreses, con que te quedes con la idea de que es un triángulo rectángulo es suficiente.	Entorno del aula
F3-S3-I6	La sesión inició con Yamil porque Nichte había ido al psiquiatra. S: ¿Cómo estás? Y: Bien S: ¿Deveras? Si te representara con un emoticon, te dibujaría con una carita triste. Y: Estoy preocupada y nerviosa.	Entorno del aula
F3-S3-I7	En la revisión de la evaluación del teorema de Pitágoras, Nichte se equivoca al hacer operaciones aritméticas. Cuando se da cuenta, borra el procedimiento muy molesta. S: No lo borres. N: No me gusta ver las cosas amontonadas. Además, si ya vi mi error, no me gusta volver a verlo.	Entorno del aula

F3-S3-I8	Se revisó el algoritmo de la raíz cuadrada. Al terminar. Nikte dijo: “a mí me torturaban con eso en primaria y por eso odio las matemáticas”.	Entorno del aula
----------	--	------------------

Conclusiones de la Fase III

Nikte

Nikte realiza las Acciones empíricas de corte y construcción de la caja en la actividad 2. Reconoce triángulos rectángulos en el trazo de las trayectorias, sin embargo, cuando Yamil se adelanta a hablar de catetos e hipotenusa, se bloquea y dice en repetidas ocasiones que no sabe de qué se está hablando lo que muestra en las interferencias (F3-S2-I3) y (F3-S2-I5). Nikte define un triángulo rectángulo como un rectángulo dividido en dos triángulos, pero no verbaliza que es un triángulo con un ángulo recto.

Las respuestas de Nikte en la actividad 5 son evidencia de que ha construido la noción de triángulo rectángulo como un Proceso, ya que recurre a él para resolver los ejercicios. Identifica los elementos que definen los triángulos rectángulos y es capaz de crear representaciones gráficas de ellos cuando es necesario, como se observa en los ejercicios 2 y 3; en cada caso, ubica la información correspondiente. Estos ejercicios también son evidencia de la coordinación del Proceso de triángulo rectángulo con el Proceso del teorema de Pitágoras.

Yamil

Por otro lado, las Acciones empíricas de construcción de la caja de la Actividad 2 ponen de manifiesto la falta de coordinación de Yamil, situación que ya se había presentado en el uso del compás y el transportador. En esta ocasión, el problema es con el uso de las tijeras en el momento de recortar y en la construcción de la caja, lo cual se expresa en la interferencias (F3-S2-I1). Al inicio de las actividades, Yamil argumentó que en la escuela ya había estudiado triángulos rectángulos y asocia a ellos el teorema de Pitágoras, el cual recuerda como $a+b=c$.

Las respuestas de Yamil a la Actividad 5 muestran evidencia de que ha logrado construir la noción de triángulo rectángulo como un Proceso, ya que recurre a este concepto para resolver los ejercicios y es capaz de identificar los elementos que lo definen. Elabora representaciones gráficas de triángulos rectángulos cuando lo necesita, tal como ocurre en los ejercicios 2 y 3, y reconoce y escribe la información relacionada con ellos. Estos ejercicios son evidencia de la coordinación del Proceso de triángulo rectángulo con el Proceso del teorema de Pitágoras.

4.2.4 Resultados Fase IV- Relaciones entre triángulos: Congruencia

Actividad 1

El contexto en los diálogos

S: Tengo varias actividades para la clase de hoy que me gustaría que hicieran juntas, con un espíritu de somos equipo y tenemos que resolverlos.

Mactzil se encontraba en el mismo salón y menciona:

M: Miss, es una cosa que pide mucho.

N: A mí casi no me gusta trabajar en equipo.

S: ¿Por qué?

N: Nunca me ha gustado. Siempre he dicho que no sé trabajar en equipo, bueno, cuando se trata de exposiciones y todo eso no me gusta. No soporto ver mis ideas con alguien más.

S: Yo creo que podemos aprender cuando trabajamos con otros, de lo que los otros hacen y ellos aprenden de lo que nosotros decimos o hacemos. Yo creo que nos enriquece mucho, no nada más en matemáticas, sino en la vida, es importante aprender a trabajar en equipo.

N: A mí no me gusta, soy muy individualista. Por ejemplo, en la olimpiadas nosotros siempre ganamos en el individual, pero en lo colectivo, no. Este año ganamos mucho en lo individual porque México es un país muy individualista.

S: A ti, Yamil, ¿te gusta trabajar en equipo?

Y: Depende de las personas con las que trabaje.

S: Entonces les pregunto, ¿quieren trabajar en equipo o quieren hacer los problemas solas?

N: Yo sola.

Y: A mí me da igual, como sea.

A pesar del diálogo que se generó en la introducción de la actividad, en el desarrollo de esta fue la primera vez que las adolescentes colaboraron de manera activa. Realizaron Acciones de comparación de triángulos, intercambiando opiniones y estableciendo criterios de selección. Cuando se les preguntó cómo clasificaron sus familias de triángulos, ambas coincidieron en que lo hicieron según sus lados y su tamaño. A continuación, se les pidió que buscaran triángulos “gemelos”. El siguiente diálogo corresponde a la parte final de la primera actividad.

S: ¿Por qué son triángulos “gemelos”?

N: Porque son iguales.

S: ¿A qué se refieren con iguales?

Y: Iguales en color y lados.

S: ¿Cómo son los ángulos?

N: Iguales.

S: ¿Por qué saben que son iguales? *No respondieron pero sobrepusieron los triángulos para verificarlo.*

Esta sesión fue la primera ocasión en que las adolescentes trabajaron de manera colaborativa. Se percibió un cambio en la actitud de las adolescentes hacia el trabajo matemático, las adolescentes dejaron de agredirse y se hablaron como colegas durante el desarrollo del trabajo..

Actividad 2

Para la comprobación de que los triángulos de la actividad eran “gemelos”, Nichte recortó los triángulos y los sobrepuso. Yamil, por su parte, midió los lados y comprobó que eran iguales.

S: ¿Y los ángulos?

Y: No creo que coincidan.

S: ¿Puedes medirlos?

Yamil midió los ángulos y comprobó que eran iguales.

S: ¿En qué son iguales dos triángulos “gemelos”?

N: En todo.

S: Efectivamente, los triángulos “gemelos” tienen todos los lados y todos los ángulos iguales. Los triángulos “gemelos” en matemáticas se conocen como triángulos congruentes. Los triángulos congruentes tienen tres lados iguales y tres ángulos iguales. En ellos tenemos que identificar los elementos correspondientes. Los vértices, lados y ángulos correspondientes están en el mismo lugar.

Actividad 3

Cada participante propuso la longitud de un segmento y, con estos, las adolescentes trazaron un triángulo. Las medidas propuestas fueron 7, 10, y 12.

S: ¿Son congruentes los triángulos que trazaron?

N: No los veo igual.

Y: Sí, yo los veo iguales.

S: ¿Cómo definimos la congruencia de triángulos?

Y: Cuando dos triángulos son iguales.

S: Cuando dos triángulos tienen los tres lados y los tres ángulos iguales. ¿Cómo podemos verificar que los triángulos que trazaron son congruentes?

Nicte recortó los triángulos y verificó la congruencia sobreponiendo los triángulos. Yamil, por su parte, midió los lados, se dio cuenta de que su triángulo no tenía las medidas solicitadas y trazó de nuevo el triángulo; después, midió los ángulos y verificó su igualdad.

S: Cuando dos triángulos tienen tres lados iguales podemos asegurar que los tres ángulos también son iguales. Esto se conoce como criterio de congruencia de triángulos y ellos nos

garantizan que dos triángulos son congruentes cuando cumplen algunas condiciones. Por ejemplo, en este caso tenemos el criterio Lado-Lado-Lado.

Los triángulos trazados por las adolescentes parecían rectángulos. Para verificar si los triángulos tenían un ángulo de 90° , se aplicó el teorema de Pitágoras. Después, se definieron los criterios de congruencia de triángulos y se realizaron ejercicios de las Guías del examen de ingreso al nivel medio superior. Durante la actividad, las adolescentes realizaron Acciones de trazo de triángulos, de comparación de lados y ángulos. En su trabajo se observa evidencia de que han construido el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras, ambos como Procesos; además, hay evidencia de su coordinación puesto que aplican el teorema de Pitágoras para verificar si el triángulo trazado era rectángulo. Por otra parte, la congruencia de triángulos se construyó como Acción. En este momento se observa que las adolescentes cuentan con las construcciones necesarias para realizar las Acciones solicitadas en la actividad.

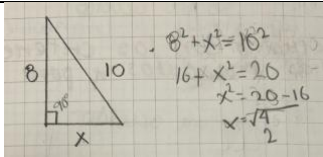
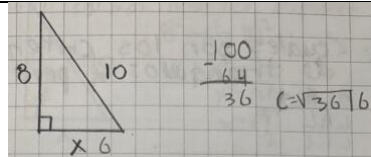
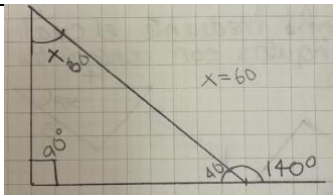
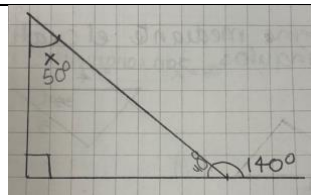
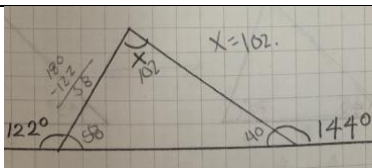
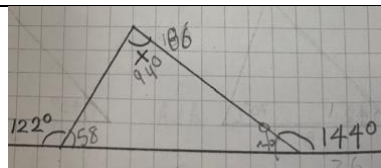
Actividad 5

Se aplicó una evaluación sobre el concepto de congruencia, los criterios de congruencia de triángulos y la construcción de conceptos abordados en las fases anteriores. Nichte empezó a resolver el examen y dijo “no me acuerdo de nada”. Así lo escribió en las preguntas sobre congruencia.

Tabla 8

Respuesta de las adolescentes a la evaluación de la Actividad 5.

Pregunta	Nichte	Yamil
Explica qué es la congruencia de triángulos.	No me acuerdo.	La congruencia de triángulos es cuando los ángulos miden igual que el otro triángulo, así pasa con los lados.
¿Cuáles son los criterios de congruencia	No me acuerdo.	ALA LAL

de triángulos y para qué sirven?		LLL
Teorema mediante el cual los siguientes triángulos son congruentes.	No me acuerdo.	LAL
Teorema mediante el cual los siguientes triángulos son congruentes.	No me acuerdo	ALA
Encuentra el valor de x en cada triángulo.		
Encuentra el valor de x en cada triángulo.		
Encuentra el valor de x en cada triángulo.		

N: No me acuerdo de nada.

S: ¿Qué hicimos con los triángulos que tenemos en la bolsa?

N: ¡Ah! Lo de si tiene lados iguales va a tener los ángulos iguales.

Nicte

Se revisó con Nichte los tres primeros ejercicios de congruencia. En los ejercicios 4, 5 y 6 de la última actividad revelan algunos de los desafíos que enfrenta Nichte. En el ejercicio 4, Nichte dio evidencia de la construcción del triángulo rectángulo y del teorema de Pitágoras como Acción, aunque al elevar ocho al cuadrado erróneamente escribe dieciséis y al elevar diez al cuadrado anota veinte. En el ejercicio 5 da evidencia de la construcción de ángulos suplementarios y de la suma de ángulos interiores de un triángulo como Acción, sin embargo, se equivoca al calcular el ángulo buscado, anotando sesenta en lugar de cincuenta. Una situación similar ocurre en el último inciso, donde también evidencia la construcción Acción de ángulos suplementarios y de la suma de ángulos interiores de un triángulo, pero comete errores aritméticos en una resta. Durante la revisión grupal de los ejercicios, se les preguntó a las adolescentes cuánto es la resta de 180 menos 144, y Nichte respondió 140. Una de las posibles causas de estas confusiones podría ser que Nichte se apresura a dar respuestas antes que su compañera.

Yamil

Por otro lado, las respuestas que brindó Yamil en la actividad cinco son evidencia de que ha construido la congruencia de triángulos como Acción, ya que no solo es capaz de definirla y enunciar sus criterios, sino que también los identificó correctamente en los ejercicios correspondientes. El trabajo de Yamil es evidencia de que ha construido el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras como Procesos, puesto que resuelve los ejercicios de manera clara y algunos procedimientos los hace de manera mental. También ha construido los conceptos de ángulos suplementarios y la suma de los ángulos interiores de un triángulo como Acción.

Resultados de interferencias de la Fase IV-Relaciones entre triángulos: Congruencia

Tabla 9

Interferencias observadas en la Fase IV Congruencia.

Id.	Descripción	Categoría
F4-S1-I1	Se les dan hojas impresas con triángulos para la actividad. Nichte toma un libro y se pone a leer un libro.	Entorno del aula

	S: Nichte, ¿por qué no nos dedicamos un rato completamente a la clase, le ponemos todas las ganas y acabamos pronto? Traje este material preparado para trabajarlo con ustedes y me gustaría que lo completáramos.	
F4-S1-I2	S: Tengo una actividades para la clase de hoy que me gustaría que los hicieran juntas, con un espíritu de somos equipo y tenemos que resolverlos. <i>Mactzil se encontraba en el mismo salón y menciona:</i> M: Miss, es una cosa que pide mucho. N: A mí casi no me gusta trabajar en equipo. S: ¿Por qué? N: Nunca me ha gustado. Siempre he dicho que no sé trabajar en equipo, bueno, cuando se trata de exposiciones y todo eso no me gusta. No soporto ver mis ideas con alguien más. S: Yo creo que podemos aprender cuando trabajamos con otros, de lo que los otros hacen y ellos aprenden de lo que nosotros decimos o hacemos. Yo creo que nos enriquece mucho, no nada más en matemáticas, sino en la vida, es importante aprender a trabajar en equipo. N: A mí no me gusta, soy muy individualista. Por ejemplo, en la olimpiadas nosotros siempre ganamos en el individual, pero en lo colectivo, no. Este año ganamos mucho en lo individual porque México es un país muy individualista. S: A ti, Yamil, ¿te gusta trabajar en equipo? Y: Depende de las personas con las que trabaje. S: Entonces les pregunto, ¿quieren trabajar en equipo o quieren hacer los problemas solas? N: Yo sola. Y: A mí me da igual, como sea.	Entorno del aula
F4-S1-I3	La administradora interrumpe la sesión para que Nichte vaya a la dirección a hablar con la directora.	Entorno del aula y

	Mientras tanto, Yamil mide la longitud de los lados y los ángulos de un triángulo. Y: No creo que los esté midiendo bien. Yamil muestra problemas en la manipulación del transportador.	Conocimientos previos.
--	--	------------------------

Conclusiones de la Fase IV- Relaciones entre triángulos: Congruencia

Nicte

A pesar de que al principio de la Actividad 1 Nicte se mostraba reacia a trabajar de manera colaborativa, lo que expresa en la interferencia (F4-S1-I2), durante la actividad ambas adolescentes lograron unirse como equipo. El trabajo realizado por Nicte evidencia que ha construido el objeto triángulo como una figura de tres lados y tres ángulos, sobre la cual realiza Acciones. Se observa que para el trazo del triángulo de la tercera actividad, Nicte sigue recurriendo al trazo de los tres segmentos que formarán el triángulo como auxiliares. No obstante, sus respuesta en la evaluación de la Actividad 5 son evidencia de que no ha construido la congruencia de triángulos como Acción. Sin embargo, cuando se le brindó el espacio para revisar lo que había trabajado en términos de congruencia, logró reconstruirlo. El trabajo de Nicte en los tres últimos incisos de la misma actividad, muestran la construcción Acción del teorema de Pitágoras, de la suma de ángulos interiores de un triángulo y de los ángulos suplementarios. Sin embargo, las respuestas tienen errores aritméticos, como es el hacer restas de manera incorrecta o para elevar un número al cuadrado, lo multiplica por dos.

Yamil

Yamil no se muestra renuente al trabajo colaborativo y así lo expresa, pero la relación con su compañera no facilita esta dinámica. A pesar de ello, logró formar equipo con Nicte para resolver la Actividad 1. En la tercera actividad, Yamil trazó el triángulo solicitado utilizando regla y compás, aunque no prestó suficiente atención a los trazos, lo que la lleva a la necesidad de repetir

su trabajo. Las respuestas de Yamil en la última actividad son evidencia de que ha construido los conceptos de triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras como Procesos, que además coordina. De manera similar, ha construido la suma de ángulos interiores y los ángulos suplementarios ambos como Procesos que también coordina.

4.2.5 Resultados de la Fase IV-Relaciones entre triángulos: Semejanza

Actividad 1

S: ¿Qué hicimos la clase pasada con los triángulos?

N: Los clasificamos.

S: ¿Cómo fue su clasificación?

Y: Por lados.

S: Buscamos triángulos que tenían tres lados iguales.

N: Y también ángulos.

S: Ahora, les pido que busquen familias que tengan tres ángulos iguales.

N: ¿Cómo, miss? No entiendo

S: La semana pasada buscaron familias de triángulos que tenían tres lados iguales, ahora vamos a buscar familias que tengan tres ángulos iguales.

N: Pues todos.

S: Yo me acuerdo que nuestras familias tenían puros miembros gemelos, pero hay otras familias en las que hay abuelos, padres, hijos, es decir que no todos los miembros de una familia son del mismo tamaño. *Las adolescentes comparaban triángulos, sin embargo no se sentía la integración de la sesión de congruencia.*

Se compararon los triángulos en grupo hasta que Nichte encontró dos triángulos de diferente tamaño con tres ángulos iguales. Después, entre todas, se encontraron otras familias de dos o tres triángulos.

S: ¿Cómo pueden describir los triángulos de una familia?

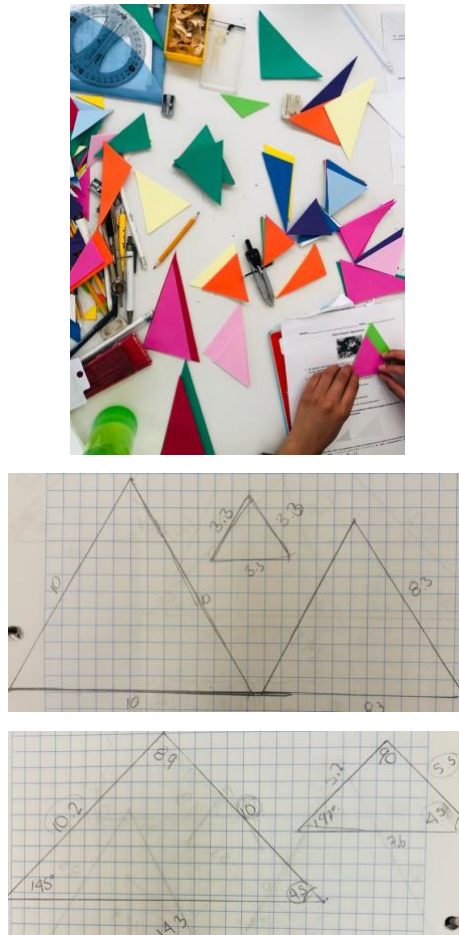
Y: Son los mismos pero de diferente tamaño.

N: Están como en escalera.

Las adolescentes completaron la actividad realizando las Acciones que se ejemplifican en la Figura 90: seleccionaron dos triángulos de una misma familia, calcaron los triángulos en una hoja, midieron la longitud de sus lados y dividieron la longitud de los lados correspondientes de cada pareja de triángulos. La actividad se realizó en grupo y se definió la semejanza de triángulos.

Figura 90

Trabajo de las adolescentes en la Actividad 1



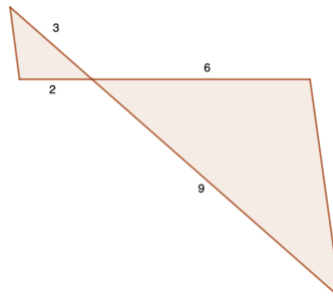
ACTIVIDAD 2

Los primeros incisos de esta actividad se enfocan en determinar la semejanza entre parejas de triángulos que cumplen ciertas características.

a) ¿Son semejantes los triángulos de la Figura 91?

Figura 91

Triángulos.



El contexto en los diálogos

N: No.

S. ¿Por qué?

N. No sé.

Y: 9 entre 3, 9 entre 2, no; porque son 6 entre 3 te da dos. Sí ¿no?

S. ¿Qué estás dividiendo?

Y: Ah, no es 9 entre 3.

S: ¿Y si los acomodas?

Y: 9 es la hipotenusa.

S: No sabemos si son rectángulos. Yo no los veo como rectángulos.

N: Yo tampoco.

S: ¿Qué relación hay entre los lados?

Y: Bueno, imaginemos que este es el lado más grande. Sería 9 entre 3 es 3 y 6 entre 3 te da dos.

S: Ahí hay un detallito. Hasta el momento solo hemos platicado que dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales, pero ahora tienen unas parejas de triángulos de los cuales no sabemos nada de sus ángulos. ¿Qué ángulos sabemos que son iguales?

N: Este y este.

S: Solo podemos afirmar que hay una pareja de ángulos iguales y es la de opuestos por el vértice. La relación entre los lados correspondientes son 9 entre 3 me da tres y seis entre dos también me da 3. Entonces, de manera análoga a la congruencia, tenemos el criterio de semejanza llamado LpALp.

En la Actividad 2 inciso b), se presentan dos triángulos que tienen lados proporcionales y se pregunta ¿son semejantes los triángulos?

N: Sí.

S: ¿Por qué?

N: Porque cada lado es lo doble del otro.

Y: 12 entre 6 es 2; 10 entre 5, 2; 8 entre 4, 2.

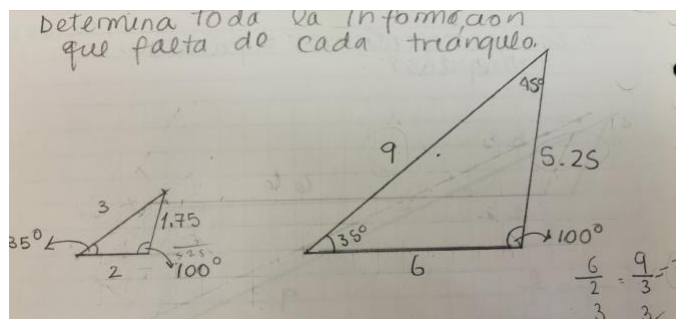
S: De manera análoga a la congruencia existen tres criterios de semejanza que son: AAA, LpLpLp, LpALp.

Nicte

En el ejercicio 3 de la actividad 2, el trabajo de Nicte evidencia la construcción de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo como un Proceso y la semejanza de triángulos como una Acción; además, muestra la coordinación de ambas estructuras, puesto que determina la medida de los ángulos interiores de los triángulos y con base en esta información responde la pregunta. Como se observa en la Figura 92, Nicte ratifica la construcción del concepto de semejanza como Acción. Reconoce la relación entre los ángulos de los triángulos y también la proporción entre los lados correspondientes, la cual utiliza para encontrar la longitud del lado que falta del triángulo.

Figura 92

Respuesta de Nicte a la Actividad 2 Ejercicio 3.



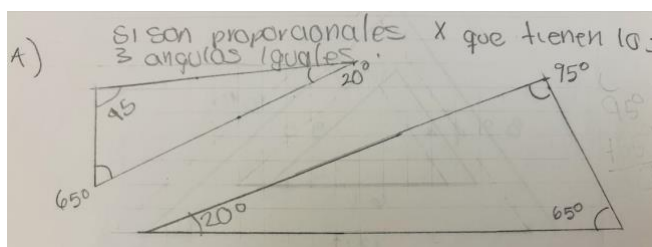
Yamil

El trabajo de Yamil evidencia que ha construido la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo como un Proceso, y lo utiliza para responder la pregunta sobre si los triángulos son semejantes. En su respuesta se observa que ha construido la semejanza como una Acción, ya que reconoce cuándo hay semejanza entre dos triángulos y cuándo no, con base en la medida de sus ángulos. Sin embargo, escribe “si son proporcionales x tiene los 3 ángulos iguales”, la respuesta del siguiente inciso es similar y dice “no son proporcionales ya que sus ángulos no son iguales” como se observa en la Figura 93. La mención de que los triángulos son proporcionales en lugar de semejantes es una muestra de que Yamil ha integrado en la semejanza tanto la igualdad de los ángulos como la proporcionalidad de los lados, lo que se confirma en el ejercicio 3, ya que reconoce la igualdad entre ángulos y la proporcionalidad entre los lados de dos triángulos semejantes, la cual utiliza para determinar la longitud del lado faltante de unos de los triángulos.

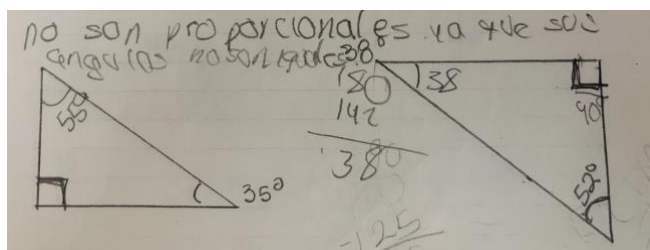
Figura 93

Respuesta de Yamil a la Actividad 2 Ejercicio 2 Incisos a) y b).

a)



b)



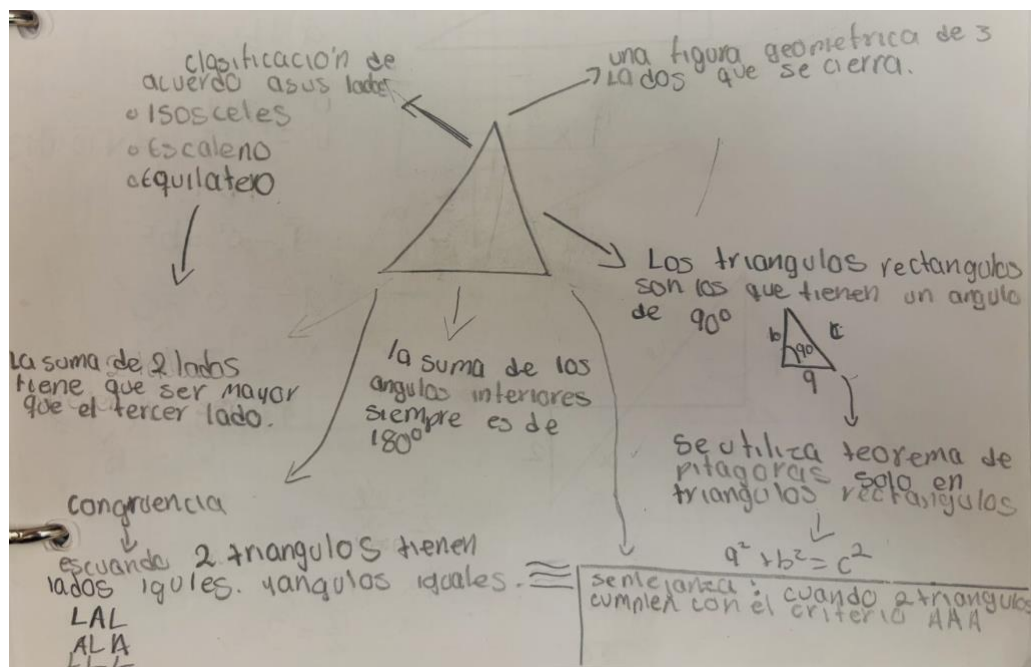
ACTIVIDAD 5

Yamil

La sesión inició con Yamil, ya que Nicte había ido a una cita con el psiquiatra. Yamil construyó el mapa con los conceptos que se habían estudiado sobre triángulos que se presenta en la Figura 94.

Figura 94

Mapa conceptual elaborado por Yamil en la Actividad 5

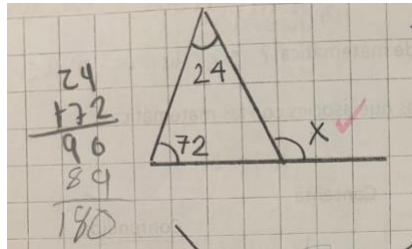


2. Determina el valor de x.

a) Yamil menciona: aquí son 96 para 180, es 84 y escribe las operaciones que se observan en la Figura 95.

Figura 95

Respuesta de Yamil a la Actividad 5 Ejercicio 2 Inciso a).

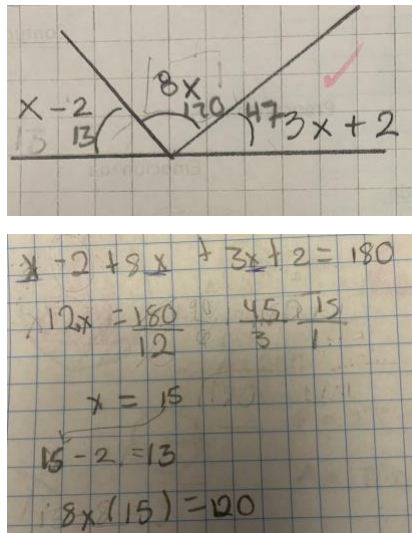


b) En el ejercicio se solicita determinar el valor de cada ángulo.

Yamil escribió la ecuación en una hoja y dijo: “recuerdo que primero tengo que sumar las equis”. Sumó las equis. Después, pensaba que $-2+2$ era -4 , se aclaró que era cero e hizo la operación de 180 entre 12. Después, encontró el valor del ángulo de 120° y de 13° , los cuales restó de 180° para determinar el tercer ángulo como se observa en la Figura 96.

Figura 96

Respuesta de Yamil a la Actividad 5 Ejercicio 2 Inciso b).



En los problemas c) y d), dado un triángulo rectángulo, se solicitó determinar el valor de x , que corresponde a un cateto en el inciso c) y a la hipotenusa en el inciso d). En la Figura 94 se aprecia que Yamil dio evidencia de haber construido el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras como Procesos, además de que mostró su coordinación.

En el inciso d) se necesitaba determinar el valor de uno de los catetos. Yamil sabía que la fórmula se modifica en este caso y escribió de memoria la resta del cuadrado del cateto menos el cuadrado de la hipotenusa.

S: No, hay un problema en lo que escribiste.

Y: Sí, está bien, porque se le resta.

S: Si lo haces así, te va a quedar un número negativo y no podemos sacar la raíz cuadrada de un número negativo.

Y: Así nos lo puso el profesor de mate. Eso nos dijo el profesor a nosotros. (Ver Figura 97)

S: Si quieres checamos en tu cuaderno que les dijo tu profesor.

Y: Voy por mi cuaderno.

De regreso, comentó:

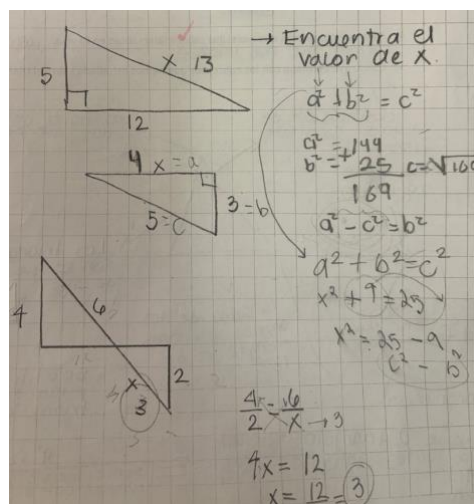
Y: ¡Chales, creo que quité el apunte! Ya no lo tengo.

Revisamos sus apuntes y confirmamos que el maestro escribió la fórmula de manera correcta.

Y: ¡Ah! Entonces es al revés.

Figura 97.

Respuesta de Yamil a la Actividad 5 Ejercicio 2 Inciso c), d) y e).



En el inciso e), Yamil dice:

Y: No es Pitágoras, es congruencia.

S: ¿Qué dijiste que era congruencia?

Y: Cuando tienen lados iguales y ángulos iguales.

S: De semejanza acabas de escribir que son dos triángulos que cumplen con el criterio de AAA.

El otro día me dijiste que eran triángulos que tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño.

¿Cómo son los lados de los triángulos semejantes?

Y: Son iguales. ¡Ah! No, ángulos iguales.

S: ¿Y los lados?

Yamil se queda callada.

S: Los lados son proporcionales, es decir, que la división entre dos lados correspondientes siempre va a ser igual.

Y: Si volteo los triángulos 4 entre 2 me va a dar 2, entonces 6 entre 3 me va a dar dos.

Nicte llegó tarde de su cita con el psiquiatra y tenía que lavar los manteles para la comida; entonces, en lugar de integrarse a la clase, se fue a lavar manteles. Para las pedagogas era más importante que Nicte lavara los manteles, aunque se perdiera la clase. Nicte se incorporó una hora más tarde a la sesión. Elaboró el mapa conceptual que se observa en la Figura 98.

Figura 98.

Mapa conceptual elaborado por Nicte en la Actividad 5.



En el mapa de conceptos Nichte escribió la palabra triángulo en el centro y dibujó seis flechas que relacionan los siguientes conceptos:

- Figura de tres lados que se cierran.
- Suma de sus ángulos $= 180^\circ$.
- Equilátero = 3 iguales; isósceles = 2 iguales ,1 diferente.
- Congruencia LLL, LAL, ALA.
- Semejanza: Tamaño diferente, forma igual.
- $a^2 + b^2 = c^2$. 90° Triángulo rectángulo.

A pesar de que Nichte había mostrado evidencia en las actividades anteriores de la construcción de ángulos suplementarios y de la suma de ángulos interiores de un triángulo como Acción, en los ejercicios de la segunda parte de la Actividad 5 cometió algunos errores aritméticos. Resolvió parcialmente el ejercicio de la suma de ángulos interiores de un triángulo, ya que si bien sumó la medida de los ángulos dados de un triángulo y restó este valor de 180° , escribió sobre el tercer ángulo el resultado de la suma que había realizado. No resolvió el ejercicio de ángulos suplementarios. Aplicó el teorema de Pitágoras a dos triángulos rectángulos y obtuvo la medida solicitada, sin embargo no escribió los procedimientos. Su trabajo indica que aún no ha construido la semejanza de triángulos como Acción, ya que requirió de ayuda para resolver el último ejercicio.

Resultados de Interferencias Fase IV. Relaciones entre triángulos: Semejanza

Tabla 10

Interferencias observadas en la Fase IV Semejanza.

Id.	Descripción	Categoría
F4-S2-I1	Y: Lupita (se refiere a la pedagoga), me duele mucho la pansa, esa cosa me hizo mucho daño. N: Es por la avena de anoche, me dijeron que estaba cruda. Y: ¿Puedo ir al baño? S: Sí. (Yamil va al baño y se tarda un rato)	Entorno del aula

	De regreso en la sesión Yamil bostezaba mucho y se mostraba con poco ánimo.	
F4-S3-I1	La sesión inicio con Yamil porque Nichte tenía cita con el psiquiatra. Nichte llegó tarde de su cita y tenía que lavar los manteles para la comida, entonces en lugar de integrarse a la clase se fue a lavar manteles. Para las pedagogas es más importante que Nichte lave los manteles aunque se pierda la clase. Nichte se incorporó una hora después a la clase.	Entorno del aula

Conclusiones de Relaciones entre triángulos: Semejanza

Nichte

El trabajo de Nichte en los ejercicios de la Actividad 2 muestra evidencia de la construcción de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo como un Proceso y la semejanza de triángulos como una Acción; además, muestra su coordinación, puesto que los utiliza para resolver los ejercicios. Reconoce en la semejanza de triángulos la relación entre los ángulos de los triángulos y la proporción entre los lados correspondientes, la cual utiliza para encontrar la longitud del lado que falta del triángulo.

En el mapa conceptual se observa que Nichte ha construido el objeto triángulo, el cual relaciona con la clasificación respecto a sus lados, de la cual solo escribió equiláteros e isósceles; también relaciona el triángulo con la propiedad de la suma de sus ángulos interiores. Establece la relación entre triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras, aunque ambos los escribe de manera económica. Sobre la congruencia y la semejanza, en la primera menciona los criterios y en la segunda su definición. Nichte no resolvió todos los ejercicios la segunda parte de la Actividad 5, comete errores aritméticos y no muestra evidencia de la construcción de la semejanza de triángulos como Acción.

Yamil

El trabajo de Yamil en la Actividad 2 evidencia que ha construido la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo como un Proceso y lo utiliza para resolver la actividad. En su respuesta, se observa que ha construido la semejanza como una Acción, ya que reconoce cuándo hay semejanza entre dos triángulos y cuándo no con base en la medida de sus ángulos. Escribe que dos triángulos “si son proporcionales x tiene los 3 ángulos iguales”, y en el siguiente inciso escribe “no son proporcionales ya que sus ángulos no son iguales”. La mención de que los triángulos son proporcionales en lugar de semejantes es una muestra de que Yamil ha integrado en la semejanza tanto la igualdad de los ángulos como la proporcionalidad de los lados, lo que se confirma en el ejercicio 3, ya que reconoce la igualdad entre ángulos y la proporcionalidad entre los lados de dos triángulo semejantes, la cual utiliza para determinar la longitud del lado faltante de unos de los triángulos.

En la Actividad 5, Yamil elaboró un mapa conceptual que evidencia la construcción de un esquema que integra diversos conceptos que parece haber construido. En el centro del mapa, Yamil dibujó un triángulo que definió como una “figura de tres lados que se cierran” y relacionó esta figura con su clasificación de acuerdo con sus lados, reconociendo así los triángulos isósceles, escalenos y equiláteros. Dibuja una flecha para señalar la conexión con la desigualdad del triángulo, que definió como “la suma de dos lados tiene que ser mayor que el tercero”. Además, el triángulo central también se vinculó con los triángulos rectángulos, los cuales identifica por tener un ángulo de 90° . Otra flecha conecta estos triángulos con el teorema de Pitágoras, el cual enfatizó que “se utiliza solo en triángulos rectángulos”. Otra flecha relaciona el triángulo central con la propiedad de la suma de los ángulos interiores. Por último, dos flechas más vinculan la congruencia y la semejanza de triángulos al triángulo central. En cuanto a la congruencia, Yamil la define como dos triángulos que tienen lados iguales y ángulos iguales, aunque no proporciona una definición de semejanza.

El trabajo de Yamil en los ejercicios de la segunda parte de la Actividad 5 muestra evidencia que ha construido varios Procesos, tales como la suma de ángulos interiores de un triángulo, los ángulos suplementarios, el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras, los cuales coordina cuando lo requiere. No obstante, la congruencia y la semejanza de triángulos al parecer las ha

construido como Acción. Es relevante mencionar que Yamil enfatizó que no se sentía segura para el examen, sin embargo, durante la última sesión, en la que se trabajó con ella de manera individual, mostró una actitud más positiva hacia el trabajo.

4.2.6. Resultados de la Fase IV Relaciones entre triángulos: Razones trigonométricas

Las adolescentes inician la Actividad 1 de razones trigonométricas trazando un triángulo rectángulo, lo recortan y lo calcan en una hoja.

El contexto en los diálogos

Y: ¿Cómo sé que es un triángulo rectángulo?

S: ¿Qué característica tienen los triángulos rectángulos?

Y: Que tienen un grado de 90° .

S. Un ángulo de 90° . Lo que pasa es que para trazar el triángulo estas utilizando la cuadrícula, y en ella sus líneas son perpendiculares.

Y. ¿A fuerzas tienen que ser rectángulos?

S: Sí.

Yamil trazó y recortó sus triángulos y dijo:

Y: Se me fue la mano. *Se refiere que al recortar los triángulos no lo hizo de manera precisa.*

S: Una pregunta, ¿todos los triángulos rectángulos son semejantes?

N: Pues sí, porque tienen el ángulo de 90° .

Y: No, porque en el ejercicio anterior vimos dos triángulos rectángulos que no eran semejantes.

S. Podemos tener dos triángulos con un ángulo de 90° pero los otros dos ángulos pueden ser diferentes.

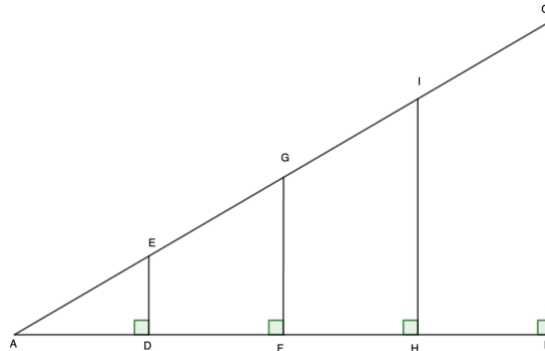
Las dos adolescentes trazaron de manera independiente los triángulos solicitados en la actividad, y se sorprendieron al descubrir que eran semejantes. Se les pidió que dividieran su triángulo en dos triángulos semejantes al original. Tras un rato de reflexión e intentos, logramos resolverlo juntas, dividiendo los triángulos a lo largo de la altura tomada desde la hipotenusa. Después, en grupo, verificamos que los triángulos obtenidos eran semejantes al triángulo original.

Cuando Yamil se dio cuenta de que los triángulos que había recortado eran semejantes, se emocionó tanto que lo gritó con fuerza.

Actividad 2

Figura 99.

Triángulos



S: ¿Son semejantes los triángulos ABC, AHI, AFG y ADE de la Figura 99?

N: Sí, porque tienen un ángulo de 90° . *Al decirlo, ella sola se dio cuenta que estaba diciendo algo incorrecto.*

S: Con un solo ángulo no puedo asegurarlo.

Y: Sí, porque siguen la misma línea del ángulo.

S: Los triángulos ABC y AFG tienen un ángulo de 90° y el mismo ángulo en el vértice A.

¿Cómo son estos dos triángulos?

En coro contestan: “semejantes”.

El trabajo de las adolescentes en las Actividades 2 y 3 evidencia que han construido suficientes estructuras para realizar las actividades.

Actividad 4

Antes de iniciar la actividad, en grupo, se elaboró un mapa conceptual del triángulo y sus propiedades que en esta ocasión incorporó la trigonometría.

El contexto en los diálogos

¿Qué es todo lo que sabemos de triángulos?

Y: Un triángulo es una figura formada por tres lados y tres ángulos.

N: Cuya suma es de 180° .

S: Claro, sabemos que la suma es de 180° y, con respecto a los lados, sabemos que la suma de dos lados siempre es mayor que el tercer lado. ¿Qué otra cosa vimos? Vimos triángulos que tienen una característica particular.

N: Los triángulos rectángulos.

S: Estos triángulos cumplen algunas propiedades especiales.

Y: Que $a^2 + b^2 = c^2$.

S: ¿Cómo se llama esto?

Y: Pitágoras

S: Vimos también congruencia y semejanza. ¿Qué es congruencia?

Y: Cuando tienen lados y ángulos iguales.

S: Exactamente.

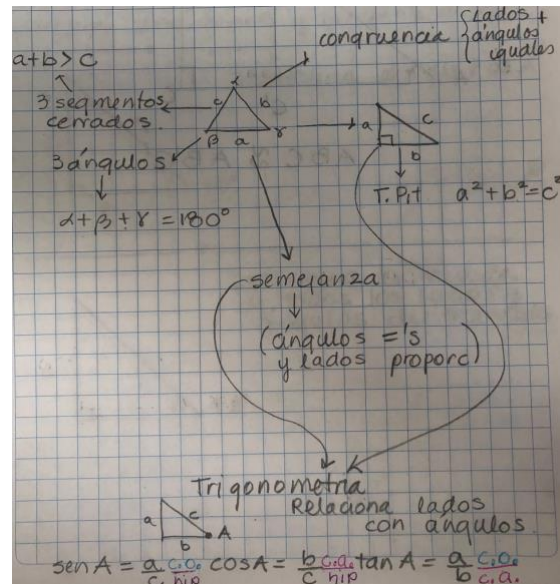
Y: Semejanza es ángulos iguales y lados proporcionales.

S: Ahora estamos viendo trigonometría, que es algo que relaciona triángulos rectángulos y semejanza. *La docente escribe la información discutida en grupo en una hoja. Ver Figura 100.*

N: ¡Aaaah! Se forma un corazón.

Figura 100

Mapa conceptual elaborado en grupo.



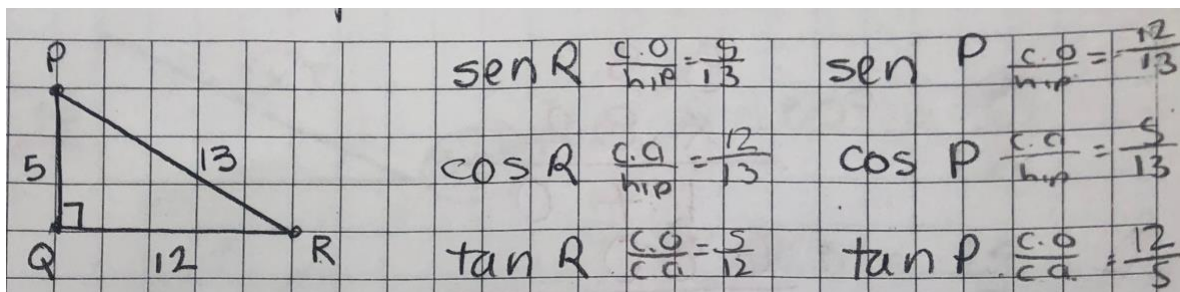
Y: Se enamoraron los triángulos rectángulos y la semejanza.

S: La trigonometría relaciona lados y ángulos de triángulos rectángulos.

Después, en la Actividad 4 se definieron las razones trigonométricas y se utilizaron para determinar las razones trigonométricas de los ángulos en los incisos 2 y 3. Como se observa en la Figura 101, Nigte muestra evidencia de haber construido el triángulo rectángulo como un Objeto sobre el cual puede operar. Lo descompone en los elementos que le dieron origen, lo que deriva en la aplicación de las razones trigonométricas como una Acción.

Figura 101

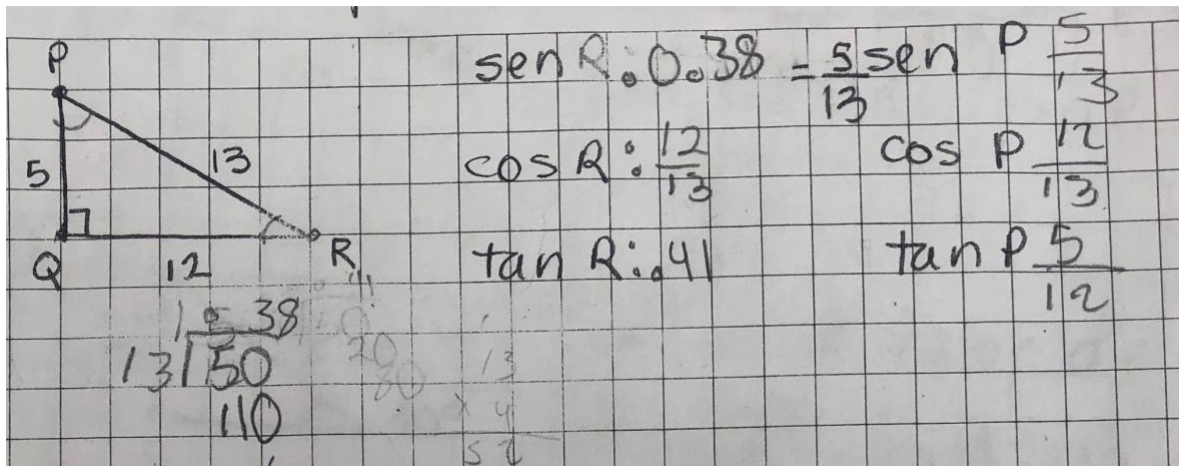
Respuesta de Nigte a la Actividad 4 Ejercicio 3



Por otra parte, la Figura 102 muestra evidencia que Yamil ha construido el triángulo rectángulo como Objeto sobre el cual puede operar y las razones trigonométricas como Acción. Sin embargo, es notoria la falta de orden mental, la cual no le permite hacer una reflexión más a fondo de lo que presenta. Escribe las razones trigonométricas del ángulo R, pero confunde las del ángulo P.

Figura 102

Respuesta de Yamil a la Actividad 4 Ejercicio 3.



Actividad 5

En grupo, se resolvió el Inciso 1, que consiste en determinar la medida de un lado de un triángulo rectángulo del que se conoce un ángulo agudo y otro de los lados.

El contexto en los diálogos

Después de encontrar la medida del ángulo buscado se menciona:

S: ¿A poco no está padrísimo?

Y: Sí. *Con mucho desánimo.* Es que estoy fuera de mí.

S: No, pues métete adentro de ti porque tenemos muy poco tiempo para el examen.

Y: Es que tengo muchas preocupaciones.

N: Yo estoy súper calmada.

Y: Yo por el examen no me importa, solo que ahorita tengo otras cosas que resolver.

S: ¿Más importantes que el examen?

Y: Sí.

S: ¿No pueden esperar dos semanas?

Y: Sí, pero va todo junto, por eso he estado un poco extraña.

N: A mí, mi psicólogo me dijo “deja todos tus problemas y concéntrate en el examen” y yo dije “bueno”.

S: ¿Podemos dejar las preocupaciones de lado?

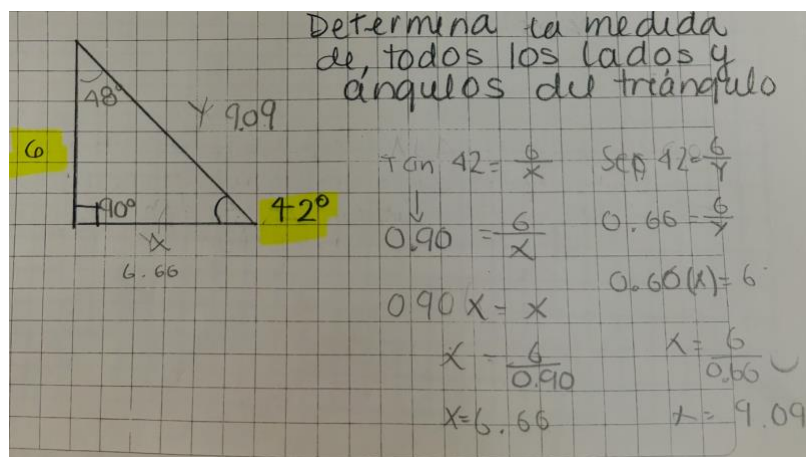
Y: No se van, las mías no se van.

En los siguientes incisos, se requiere determinar todos los elementos de un triángulo rectángulo del cual solo se conoce un lado y un ángulo.

La Figura 103 evidencia que Nichte ha construido el triángulo rectángulo como Objeto, el cual desencapsula en los elementos que le dan origen y opera sobre ellos. También ha construido las razones trigonométricas como un Proceso puesto que realiza secuencias que ha interiorizado. Usa lo que ha construido que deriva en la resolución de los problemas.

Figura 103

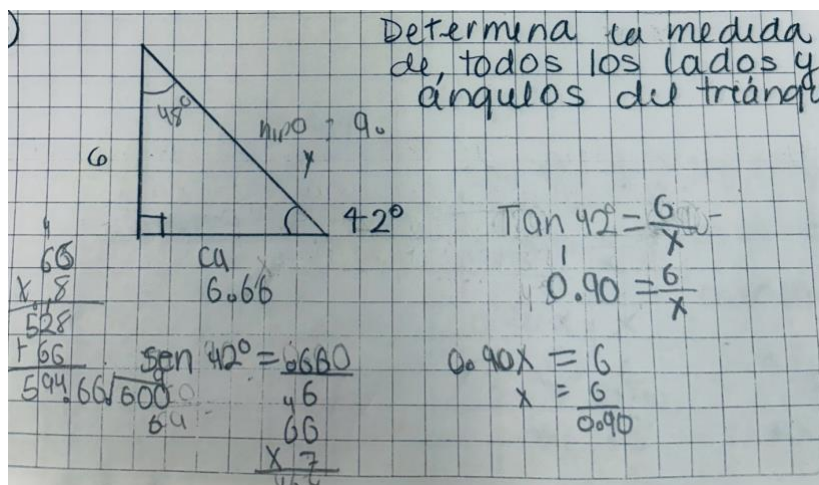
Respuestas de Nichte a la Actividad 5 Ejercicio 2



En la Figura 104 es notoria la falta de formalidad y orden en el trabajo de Yamil. En la resolución de los ejercicios de esta actividad empieza a escribir del lado derecho, continua del lado izquierdo y termina en medio. Los procedimientos no siguen un orden lógico, sin embargo en algunos de ellos llega al resultado correcto. En otras ocasiones determina el resultado de manera parcial o no la concluye, y escribe el resultado sobre un elemento que no corresponde. Esta falta de orden no le permite reflexionar a fondo sobre lo que presenta. En el desarrollo de la actividad comentó: “yo me salté algunos pasos”, “es que me gusta saltarme procedimientos porque todos son aburridos”.

Figura 104

Respuestas de Yamil a la Actividad 5 Ejercicio 2.



Resultados Interferencias Fase IV-Relaciones entre triángulos: Razones Trigonómicas

Tabla 11

Interferencias observadas en la Fase IV Razones Trigonómicas.

Id.	Descripción	Categoría
F4-S5-I1	Después de encontrar la medida del ángulo buscado, la docente menciona: S: ¿A poco no está padrísimo? Y: Sí (con mucho desánimo) es que estoy fuera de mí.	Entorno del aula.

	S. No pues métete adentro de ti porque tenemos muy poco tiempo para el examen. Y: Es que tengo muchas preocupaciones. N: Yo estoy super calmada Y: Yo por el examen no me importa, solo que ahorita tengo otras cosas que resolver. S: ¿Más importantes que el examen? Y: Sí. S: ¿No pueden esperar dos semanas? Y: Sí, pero va todo junto, por eso he estado un poco extraña. N: A mí, mi psicólogo me dijo “deja todos tus problemas y concéntrate en el examen” y yo dije “bueno”. S: ¿Podemos dejar las preocupaciones de lado? Y: No se van, las mías no se van.	
--	--	--

Conclusiones de Fase IV- Relaciones entre Triángulos: Razones Trigonométricas

Nicte

El trabajo de Nicte muestra evidencia de que ha construido el triángulo rectángulo como un Objeto sobre el cual puede operar, lo desencapsula en los elementos que le dieron origen y reconoce en ellos la relación entre lados y ángulos agudos, lo que deriva en la aplicación de las razones trigonométricas. También hay evidencia de que ha construido las razones trigonométricas como Proceso, puesto que es capaz de utilizarlas para determinar valores desconocidos de triángulos rectángulos a partir de información parcial de los mismos.

Yamil

En esta sesión, Yamil manifestó su preocupación por un problema personal que no le permitía enfocarse en el trabajo. Esta situación se refleja en el trabajo que realizó y se expresa en la informalidad y el desorden de su trabajo. Si bien, hay evidencia de que ha construido las razones

trigonómicas como Acción, puesto que es capaz de aplicarlas en triángulos rectos. En los ejercicios de la última actividad se observa falta de lógica en sus procedimientos, lo cual podría ser el reflejo del impacto de la situación emocional sobre su trabajo.

4.2.7 Resumen de construcciones mentales y las interferencias.

A continuación, se presenta un resumen de las estructuras mentales y los obstáculos observados durante la implementación de las actividades.

FASE I

Nicte

- En las actividades 4 a 6, evidenció trazo de triángulos como Acción y su posible transición a Proceso, sin embargo, utiliza líneas auxiliares para los trazos.
- En la actividad 7, la clasificación del material evidenció la interiorización en Proceso de la clasificación de triángulos.
- En la actividad 8 construyó la desigualdad del triángulo como Acción.

Yamil

- En las actividades 4 y 5 evidenció que no había construido el trazo de triángulos como Acción.
- Mostró dificultad en la coordinación motriz en el uso del compás.
- En la actividad 8 dio evidencia de la construcción incipiente de la Desigualdad del triángulo como Acción.

FASE II

Nicte

- Su trabajo dio evidencia de la construcción del Proceso de ángulos opuestos por el vértice.
- La explicación a Dzan fue una clara manifestación de la interiorización de los ángulos opuestos por el vértice y ángulos entre paralelas cortadas por una secante como Proceso.

- En las actividades 8 y 9 mostró la coordinación de los Procesos de ángulos opuestos por el vértice y el Proceso de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Cometió errores aritméticos que no le permitieron llegar al resultado final de algunos problemas.
- En la actividad 9 evidenció la construcción de la suma de los ángulos interiores de un triángulo como un Proceso.

Yamil

- Su trabajo en la actividad 9 mostró evidencia de la construcción Acción de ángulos complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice.
- En la actividad 7 presentó problemas de coordinación con uso del transportador.
- Evitó escribir operaciones lo que limitó la construcción de Procesos.
- Utilizó el método de ensayo y error en la resolución de ejercicios tipo examen de ingreso al nivel medio superior.
- En la actividad 9 evidenció la construcción de la suma de los ángulos interiores de un triángulo como un Proceso.

FASE III

Nicte

- Mostró disposición al trabajo en la realización de las Acciones empíricas de construcción de la caja en la actividad 2.
- En la introducción de los elementos del triángulo rectángulo, se bloqueó.
- En la actividad 5 dio evidencia de la construcción del triángulo rectángulo como un Proceso, debido a que reconoció sus elementos y creó representaciones pertinentes.
- Construyó el teorema de Pitágoras como una Acción.

Yamil

- Mostró problemas en el recorte y construcción de la caja de la actividad 2.
- En la actividad 5 evidenció la construcción del triángulo rectángulo como un Proceso, lo identificó y representó gráficamente.

- Construyó el teorema de Pitágoras como Proceso y lo coordinó con el Proceso de triángulo rectángulo.

FASE IV: Relaciones entre triángulos

Congruencia

Nicte

- Puso resistencia al trabajo colaborativo.
- Construyó parcialmente la congruencia de triángulos como Acción.
- En la actividad 5 cometió errores aritméticos en la resolución de ejercicios, lo que limitó su solución.

Yamil

- No se mostró renuente al trabajo colaborativo.
- En la actividad 5 mostró coordinación de los Procesos de triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras.
- La dificultad de la ejecución motriz y la falta de atención la obligaron a repetir algunas actividades.

FASE IV: Relaciones entre triángulos

Semejanza

Nicte

- Dio evidencia de la construcción del Proceso de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- El Mapa Conceptual dio evidencia de la construcción de un Esquema del triángulo en el que estableció la relación con otras estructuras construidas.
- No construyó la semejanza como Acción.

Yamil

- Su trabajo dio evidencia de la construcción parcial de la semejanza de triángulos como Acción.
- El Mapa Conceptual dio evidencia de la construcción de un Esquema donde el triángulo como Objeto estaba bien articulado y conectado con diversas estructuras.
- Reconoció su inseguridad hacia el examen, lo que podría indicar factores afectivos que influyeron en su desempeño.

FASE IV: Relaciones entre triángulos

Razones trigonométricas

Nicte

- Construyó el triángulo rectángulo como Objeto, lo que le permite aplicar Acciones y Procesos.
- Construyó las razones trigonométricas como un Proceso, ya que no solo las nombra, sino que las utiliza para resolver problemas.

Yamil

- Mostró dificultades significativas derivadas de factores personales que afectaron su concentración y desempeño.
- Su trabajo era informal y desordenado, lo que dificultó el desarrollo de las estructuras mentales.
- Construyó las razones trigonométricas como Acción.
- La influencia del contexto emocional fue significativa e intervino en la atención, organización y disposición al trabajo.

4.3 Comparativo de respuestas del examen de conocimientos

En el marco metodológico se declaró la aplicación de un examen al inicio de la intervención, que sirvió de diagnóstico. Al finalizar la intervención, se aplicó el mismo examen con el propósito de elaborar un análisis comparativo de las respuestas obtenidas. Los reactivos del examen fueron elaborados con base en el tipo de preguntas utilizadas en el examen de COMIPEMS. A

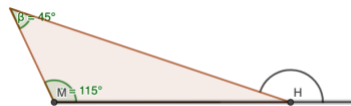
continuación se presentan las preguntas con las respuestas por adolescente, donde AI representa la respuesta anterior a la intervención y PI la respuesta posterior. Al final se expone un análisis de las construcciones mentales realizadas por las adolescentes.

Nicte

1. ¿Cuál es el valor del ángulo H en el triángulo de la Figura 105?

Figura 105

Triángulo



AI: Respuesta 180° .

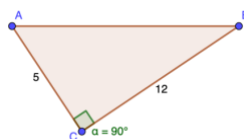
PI: En la respuesta se aprecia que Nicte reconoce que la suma de los ángulos interiores es 180° . Suma en el margen de la hoja los dos ángulos que conoce. Escribe la medida del ángulo que falta, 20° , y del ángulo suplementario buscado, que son 160° .

Análisis: De las respuestas de Nicte se puede deducir que ha construido el triángulo como un Objeto sobre el cual puede operar, entiende la suma de ángulos interiores de un triángulo y el concepto de ángulo suplementario como Procesos, que además coordina, ya que incluso hace algunas de las operaciones de forma mental.

2. Determina el perímetro del triángulo ABC de la Figura 106 y explica tu procedimiento.

Figura 106

Triángulo



AI: Nicte escribió: $L+L+L =$ No me acuerdo

PI: El trabajo de Nichte demuestra que reconoce el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras, los relaciona y utiliza para determinar la longitud del lado faltante y escribe:

$$5^2 + 12^2 = c^2$$

$$25 + 144 = c^2$$

También muestra evidencia del uso del concepto de raíz cuadrada y escribe:

$$\sqrt{169} = 13$$

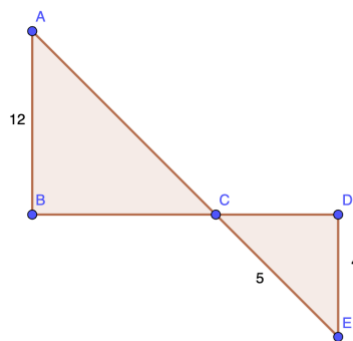
Sobre el lado correspondiente del triángulo, escribió la longitud que encontró. Sin embargo, no determina el perímetro del triángulo que se solicita.

Análisis: Se aprecia que Nichte entiende el triángulo rectángulo como un Objeto sobre el cual puede operar. Muestra que ha interiorizado cuáles son los catetos y la hipotenusa del triángulo, usa lo que ha construido, que deriva en la aplicación del teorema de Pitágoras, el cual ha construido como un Proceso. Se aprecia evidencia de interiorización y de que la alumna ha encapsulado el triángulo rectángulo como Objeto y el teorema de Pitágoras como un Proceso.

3. Los triángulos ABC y CDE de la Figura 107 son semejantes y se conoce la medida de tres lados. Determina la longitud de todos los lados del triángulo.

Figura 107

Triángulos semejantes.



AI: Sobre el lado AC marca 24, sobre el lado BC 12, sobre el lado CD 4. Escribió: “Fue lo primero que se me ocurrió”.

PI: En la Figura 108 se observa que Nichte tiene idea de que la pregunta tiene que ver con cocientes, sin embargo, en el primer renglón expresa los cocientes de los vértices. En el segundo renglón expresa el cociente de los lados correspondientes.

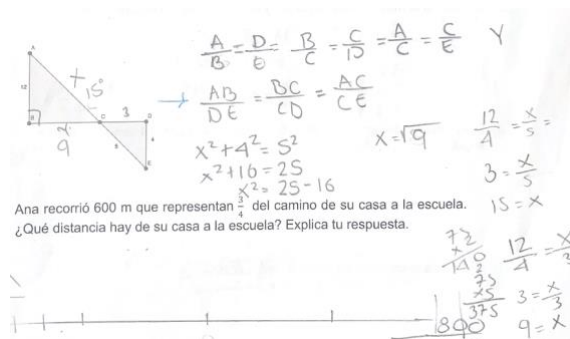
En la parte inferior del lado izquierdo, se aprecia que reconoce el triángulo CDE como rectángulo, sustituye en el teorema de Pitágoras los valores de la hipotenusa y un cateto (4 y 5) y obtiene el valor del otro cateto (3), el cual escribe sobre el segmento CD.

En la parte inferior del lado derecho, sustituye la longitud de tres de los lados en una proporción y obtiene la longitud del lado AC (15).

Abajo, realiza el mismo procedimiento y obtiene la longitud del lado BC (9).

Figura 108

Respuestas de Nichte en la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 3.



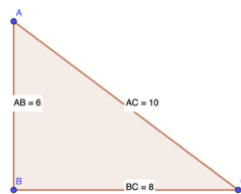
Análisis: Se aprecia que Nichte entiende el triángulo rectángulo como un Objeto sobre el cual puede operar y entiende la relación de semejanza como un Proceso, puesto que realiza una secuencia que ha interiorizado.

Nichte muestra que ha interiorizado cuáles son los lados correspondientes y, cuando no los conoce, usa lo que ha construido, que deriva en la aplicación del teorema de Pitágoras, el cual ha construido como un Proceso. Se aprecia evidencia de interiorización y que la alumna ha encapsulado el triángulo rectángulo como Objeto, la semejanza como Proceso y el teorema de Pitágoras como un Proceso también.

4. Determina las razones trigonométricas del ángulo A en la Figura 109.

Figura 109

Triángulo.

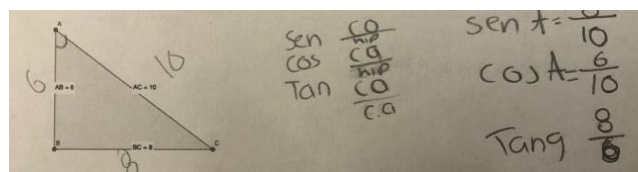


AI: Nichte escribió “no me acuerdo”.

PI: La Figura 110 muestra que Nichte escribió la longitud de cada lado con números grandes, después junto al triángulo escribió la definición de las razones seno, coseno y tangente. Por último, substituyó los valores en las razones correspondiente y dejó los resultados como fracción.

Figura 110

Respuestas de Nichte a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 4.



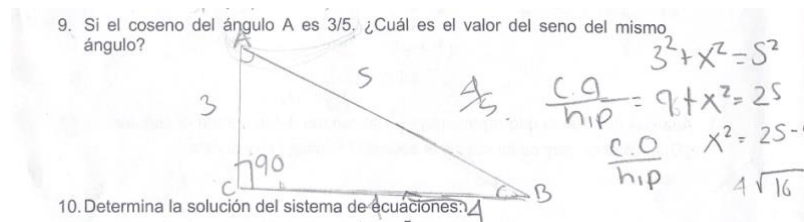
Análisis: Se aprecia que Nichte entiende el triángulo rectángulo como un Objeto sobre el cual puede operar. Muestra que ha interiorizado cuáles son los catetos y la hipotenusa del triángulo y su relación con los ángulos. El trabajo evidencia que ha construido las razones trigonométricas como Acción.

4. Si el coseno del ángulo A es $\frac{3}{5}$, ¿cuál es el valor del seno del mismo ángulo?

AI: Escribió “no lo he visto”.

PI: Nichte traza un triángulo rectángulo, nombra los vértices como A, B y C. Coloca las longitudes de los lados que corresponden al coseno del ángulo indicado de manera correcta. Del lado derecho, se observa que utiliza el teorema de Pitágoras y determina la longitud del lado que falta. Entre el triángulo y el procedimiento del teorema de Pitágoras escribe c.a./hip y abajo c.o./hip lo cual corresponde al seno del ángulo buscado. El valor $\frac{4}{5}$ que corresponde al seno del ángulo no está alineado a la razón correspondiente como se observa en la Figura 111.

Figura 111. Respuestas de Nichte a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 5



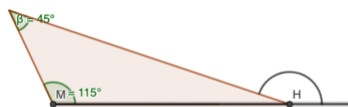
Análisis: Se aprecia el dominio del concepto de triángulo rectángulo, del teorema de Pitágoras y de razones trigonométricas. Sin embargo, es notoria la falta de formalidad para escribir las cosas, no pone los signos de igual y los procedimientos no siguen un orden lógico, sin embargo, llega al resultado correcto, aunque no lo señala. Con la respuesta, se confirma que ha construido la noción de triángulo rectángulo como objeto y el teorema de Pitágoras se ha construido como un Proceso. La exploración del problema por parte de Nichte deja ver que tiene claro el teorema de Pitágoras, puesto que lo utiliza para obtener el valor del cateto que no conoce y necesita para determinar el seno del ángulo solicitado, su respuesta da evidencia de la construcción de las razones trigonométricas como Acción.

Yamil

1. ¿Cuál es el valor del ángulo H de la Figura 112?

Figura 112

Triángulo



AI: Respuesta: “tal vez 180° ya no me acuerdo mucho”.

PI: Yamil sumó los dos ángulos interiores del triángulo como $115^\circ + 45^\circ = 60^\circ$. No parece reflexionar sobre la relación del resultado con los números que está sumando. Después escribe 20° en el ángulo interior que falta.

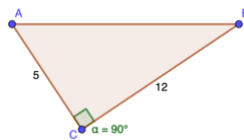
Análisis: Yamil mostró evidencia de haber construido la suma de ángulos interiores de un triángulo y el concepto de ángulos suplementarios como Procesos

. Sin embargo, al final de la intervención, Yamil estaba viviendo una situación de mucho estrés por problemas con su mamá. Ella misma lo mencionó en las sesiones. La situación emocional rebasaba la preocupación del examen.

2. Determina el perímetro del triángulo ABC de la Figura 113 y explica tu procedimiento.

Figura 113

Triángulo



AI: Yamil escribió: no me acuerdo la fórmula para sacar el P=.

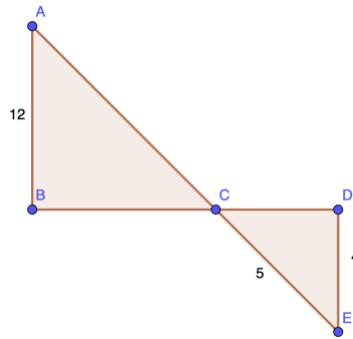
PI: Yamil eleva al cuadrado la longitud de los catetos y suma estos números, sin indicar qué está haciendo. Después, saca la raíz cuadrada del resultado y la escribe sobre el lado correspondiente. No determina el perímetro solicitado.

Análisis: Se aprecia que Yamil entiende el triángulo rectángulo como un Objeto sobre el cual puede operar. Muestra que ha interiorizado cuáles son los catetos y la hipotenusa del triángulo, usa lo que ha construido, que deriva en la aplicación del teorema de Pitágoras, el cual ha construido como un Proceso. Se aprecia evidencia de interiorización y que la alumna ha encapsulado el triángulo rectángulo como Objeto y el teorema de Pitágoras como un Proceso.

3. Los triángulos ABC y CDE de la Figura 114 son semejantes y se conoce la medida de tres lados. Determina la longitud de todos los lados de triángulo.

Figura 114

Triángulos semejantes

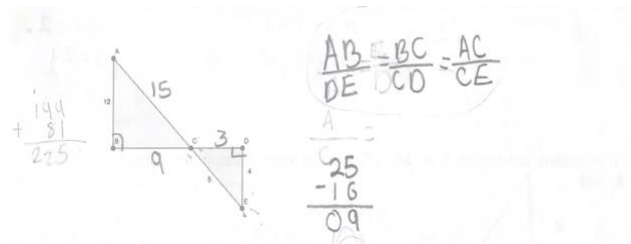


AI: Yamil escribió “Volteé el triángulo para poder sacar la medida de los lados”

PI: Yamil plantea el cociente de los lados correspondientes en la parte superior derecha de la Figura 115. Después, se puede suponer que aplicó el teorema de Pitágoras porque abajo tiene la resta de 25 menos 16, que le da como resultado 9. En el triángulo, está escrito el valor de 3 en el lado CD. También se observa 9 sobre el lado BC. Del lado izquierdo hay una operación que borró donde se observa la suma $144+81=225$. La operación corresponde a la aplicación del teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, misma que sirvió para determinar la longitud del lado que falta (15), valor que se encuentra escrito sobre el lado correspondiente.

Figura 115

Respuestas de Yamil a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 3.



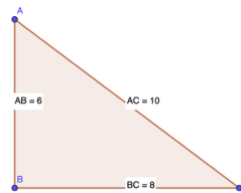
Análisis: Se aprecia que Yamil entiende el triángulo rectángulo como un Objeto sobre el cual puede operar y entiende la relación de semejanza como un Proceso. Da evidencia de que ha interiorizado cuáles son los lados correspondientes de los triángulos semejantes. Se observa la aplicación del teorema de Pitágoras, el cual ha construido como un Proceso, puesto que lo usa cuando lo requiere, pero no lo enuncia. Se aprecia evidencia de interiorización y del

encapsulamiento del triángulo rectángulo como Objeto, la semejanza y el teorema de Pitágoras, ambos como Proceso.

4. Determina las razones trigonométricas del ángulo A en la Figura 116.

Figura 116

Triángulo.

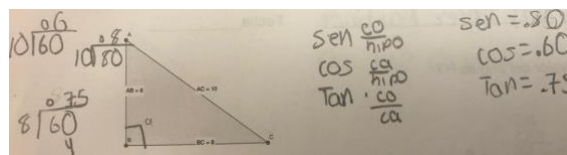


AI: Yamil escribió “no me acuerdo”.

PI: Yamil escribió la definición de las razones trigonométricas en el centro, no sustituye los valores, pero sí realiza las divisiones (en el lado izquierdo) y en el lado derecho escribe la expresión decimal de cada razón lo que se observa en la Figura 117. Los valores del seno y coseno son correctos, sin embargo, no determina el valor de la tangente del ángulo A, lo cual podría deberse a una distracción por el problema que estaba pasando.

Figura 117

Respuestas de Yamil a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 4.



Análisis: Se aprecia que Yamil entiende el triángulo rectángulo como un Objeto sobre el cual puede operar. Muestra que ha interiorizado cuáles son los catetos y la hipotenusa del triángulo y su relación con los ángulos. El trabajo evidencia que ha construido las razones trigonométricas como Acción.

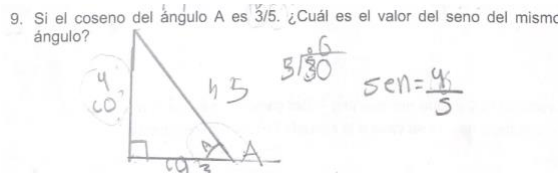
5. Si el coseno del ángulo A es $\frac{3}{5}$. ¿cuál es el valor del seno del mismo ángulo?

AI: Escribió “no lo he visto”.

PI: Dibujó un triángulo y ubicó en él los valores con la información del problema de manera correcta. Obtuvo el valor del cateto faltante; aunque no es claro cómo lo obtuvo, es probable que haya aplicado el teorema de Pitágoras. Determinó la expresión decimal del coseno y obtuvo el seno del ángulo A como fracción como se observa en la Figura 118.

Figura 118

Respuestas de Yamil a la evaluación de conocimientos, posterior a la intervención, a la pregunta 5.



Análisis: Después de la intervención, Yamil construye un triángulo rectángulo como un Objeto sobre el cual puede operar. Ha interiorizado la relación entre los lados y ángulos del triángulo y las razones trigonométricas. Se infiere, pero no se observa de manera explícita, la aplicación del teorema de Pitágoras, el cual es construido como Proceso puesto que se asume que no recurre a la escritura de la fórmula.

Conclusiones del examen

Nicte

Respecto a las preguntas del examen, los conocimientos previos de no eran suficientes para poder responder las preguntas del examen en la primera aplicación (AI). Se observa una diferencia significativa en la aplicación posterior a la intervención (PI). Resuelve los ejercicios de manera correcta, pero se observa falta de formalidad de los procedimientos: omite signos de igualdad; escribe lo que sabe, no importa dónde, empieza por la derecha, continua a la izquierda y termina en el medio. Sin duda ha aprendido mucho, su trabajo muestra evidencia de la construcción de haber construido la suma de ángulos interiores y los ángulos suplementarios como Acción;

triángulo rectángulo como Objeto; el teorema de Pitágoras como Proceso y la semejanza de triángulos y las razones trigonométricas como Acciones.

Yamil

En cuanto a Yamil, en la primera aplicación (AI) respondió “no me acuerdo” en cuatro de los cinco ejercicios y uno lo resolvió de manera incorrecta. Hay una diferencia significativa en la aplicación posterior, muestra claridad en los conceptos, excepto en la primera pregunta, que no concluye. Su trabajo es evidencia de la construcción de la suma de ángulos interiores y los ángulos suplementarios como Acción; triángulo rectángulo como Objeto; el teorema de Pitágoras como Proceso y la semejanza de triángulos y las razones trigonométricas como Acciones.

4.4 Resultados de la entrevista y el evaluación post-COMIPEMS

Se entrevistó a las adolescentes por separado.

Yamil

Y: Yo quería Conalep pero me dijeron que yo podía dar más, así que puse como primera opción la prepa y me quede en el Bache 13. Me gusta mucho la forma en como trabajan, aunque a veces mas bien solo nos dedicamos a entregar y con eso pasas, no se trata de aprender, sino de entregar. Los profes se dedican más a las entregas que a lo que estudias.

Algunos nos ponen a hacer resúmenes y con eso pasas.

S: ¿Cuántas materias llevas?

Y: 10 materias.

S: ¿Cuál es la que más te gusta?

Y: Mate.

S: ¿Qué estás viendo?

Y: Binómios conjugados, Binomio al cuadrado. Lo que se me complica son las ecuaciones gráficas y la de igualación.

S: Y ¿tus compañeros?

Y: Chidos, yo soy la que más ayudo.

S: He cambiado mucho de amigos. Al principio tenía amigos que eran muy estrictos, después cambié de amigos.

Ahora cuéntame, ¿Cómo te sentiste en el examen de COMIPEMS?

Y: En mate no tan nerviosa. En lo demás se me complicaron física, geografía e historia. Geografía nunca me interesó. Estaba nerviosa porque cuando quedaba media hora me faltaban 80 preguntas, no me acuerdo si 50 o 80 preguntas.

S: ¿Cuántas preguntas eran?

Y: 120

S: Me comentaron que ese día te llevó tu mamá al examen.

Y: Sí, antes de hacer el examen, algo se me vino a la mente y se me revolvieron las emociones y algo me decía no vas a poder.

S: Si te dijeran mañana tienes que decir que carrera vas a estudiar. ¿Qué escogerías?

Y: Contabilidad.

S: Me ayudas a responder un examen para saber qué te acuerdas.

Durante la solución del Examen en la construcción del cuadrado.

Y: Los vértices y las aristas me confunden.

S: ¿Un cuadrado es una figura de cuántos lados?

Y: Cuatro.

S: ¿Qué características tienen esos lados?

Y: Todos los lados son iguales.

Yamil lee las preguntas en voz alta y responde las preguntas.

En el inciso c) dice es un triángulo recto.

S: ¿Qué característica tiene ese triángulo?

Y: Yo solo sé que un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 grados.

S: Exacto

Para determinar el perímetro del triángulo dice “se suman los tres lados”. Me falta este lado (se refiere a la hipotenusa), en voz alta dice $a^2 + b^2 = c^2$. Sustituye el valor de los catetos y determina la longitud de la hipotenusa aproximando la raíz cuadrada de la suma. Dice: “Sería si no me equivoco, $16 + 16$ y la raíz cuadrada de 32 que debe ser como 5.7” y escribe ≈ 5.7

Para el perímetro suma mentalmente los lados y escribe 13.7

El inciso e) que pregunta ¿Cuánto miden sus tres ángulos interiores?

Yamil respondió 180° .

S: Y ¿cuánto mide cada ángulo?

Y: No me acuerdo, se me olvidó.

S: ¿Cómo se median los ángulos?

Y: Se me olvidó.

Repasamos cómo medir ángulos:

S: ¿Cuál es el vértice del ángulo?

Y: Este es de 90° . Con el transportador intenta medir un ángulo agudo y dice 50.5°

Se revisa el proceso que está utilizando y lo corrige a 45° .

S: Y si ya mediste el ángulo ¿cómo podemos saber cuánto mide el ángulo que falta?

Y: Sumándolo, $45+90$ son 135, 180 menos 135 son 45° .

S: Muy bien!

Y: ¿Cuál es el seno del ángulo B? ¿No es eso lo de coca entre hip?

En el margen de la hoja Yamil escribió las definiciones de coseno, seno y tangente. Después escribe el seno del ángulo B y hace la división. También determina la tangente del ángulo solicitado.

Al final del examen.

S: Te felicito. Estoy sorprendida del trabajo que hiciste. Bueno y ahora que vas a hacer en navidad. ¿Vas a ver a tu mamá?

Y: Creo que no. Es que tuve problemas con mi mamá. Bueno ella se enojó conmigo, el chiste es que me empezó a ofender mucho últimamente. Iba por mí a escuela y diario llegaba yo llorando a la casa. El jueves de la semana pasada le puse un alto y entonces me dijo, ah, si va a ser así, entonces, cada quien se va por su lado. Pero el viernes, me dijo mi hermana, mi mamá quiere ir por ti a la escuela. Y de nuevo llegó a ofenderme más y me dijo que no me quiere volver a ver. Que el domingo iba a ir a ver a mi hermana, pero que no me quería ver a mí. Si pueden que te encierren, porque no te quiero ver. Yo no le respondí nada. Le dije a mi hermana que no me hablara. Vino y no me habló para nada. La verdad es que me dice cosas muy feas. Mi psicóloga me dijo que era mejor que no la viera.

La verdad es que yo ya me he agarrado a golpes con mi mamá. Mi psicóloga me dijo que si seguía así, no iba a poder regresar con ella.

S: Lo siento mucho Yamil. A todos nos toca pasar diferentes cosas en la vida y a veces las cosas duras nos fortalecen mucho. Déjame decirte que a mí, me da mucho gusto verte, ver que estás cursando la preparatoria. ¿Ya saliste de vacaciones?

Y: No hasta el jueves. Solo voy a checar calificaciones y a entregar trabajos.

Análisis

Yamil trazó un cuadrado y su diagonal. Yamil ha construido el triángulo rectángulo como Proceso, reconoció los elementos que lo determinan, catetos y ángulos, de estos últimos incluso escribió la medida de sus ángulos. También ha construido el teorema de Pitágoras como Proceso, el cual coordina con el Proceso del triángulo rectángulo y con ellos determina la longitud de la diagonal del cuadrado, valor que aproximó mentalmente.

En las respuestas de Yamil hay evidencia de que ha construido la suma de los ángulos interiores de un triángulo como un Proceso y las razones trigonométricas como Acción. El problema que se evidencio fue la dificultad para medir los ángulos con el transportador.

Nicte

S: La próxima semana vengo a impartir una conferencia, pero las quería ver antes para saber ¿cómo están y cómo se sienten? ¿cómo les ha ido en la prepa?

N: Bueno, yo estoy muy bien y voy súper bien. Falté una semana a la escuela y de ahí como que se me complicaron las cosas. Era una semana de entregar muchos proyectos.

S: ¿Te enfermaste?

N: No fui por problemas. Pero en matemáticas desde el inicio, mal, mal, mal. Salí con 6 del semestre.

S: ¿Por qué se te están complicando las mates?

N: Bueno las ecuaciones sí las supe hacer, pero había luego otras por método gráfico y todo eso si se me complicó. Los porcentajes no se me daban.

S: Pero ya pasaste.

N: Yo en matemáticas, no, ni se diga.

S: Yo te veía muy bien en las clases. De hecho, en el examen de COMIPEMS eres la que tuvo mejor calificación de las tres.

N: Pues en matemáticas si me fue muy mal este semestre. En inglés saqué 10, en filosofía 9, en física 8 y eso que no sé nada, porque solo resolvimos algunas páginas. En informática saqué 6 porque no entregué prácticas. En matemáticas solo tuve un acierto. Es que mi maestro explicaba poco porque muchos ya lo sabían. En artística igual saque 10.

Se omite parte de la entrevista que expone elementos contextuales que no aportan información al análisis.

S: Por cierto, si hoy tuvieras que decidir que estudiar. ¿Qué estudiarías?

N: Lenguas extranjeras.

S: Con razón te sacaste 100 en inglés.

N: Pero es nivel burrásico.

S: Bueno, ahora la otra cosa es que quería investigar qué se acuerdan de lo que habíamos visto. ¿Me ayudas a responder esta evaluación?

N: Traza un cuadrado de 4 cm de lado y llama A, B, C, D a los vértices.

S: ¿Cuáles son los vértices? ¿te acuerdas? ¿qué característica tiene un cuadrado?

N: Es una figura de 4 lados.

S: ¿Cómo son esos lados?

N: Iguales.

S: Y ¿cómo son sus ángulos?

N: Iguales,

Nicte traza el cuadrado, y su diagonal. Escribió que el triángulo que se formó entre los lados y la diagonal es rectángulo.

N: El perímetro es la suma de sus tres lados, ¿no?

Nicte toma la regla para medir la diagonal.

S: ¿Tenemos alguna forma de encontrarlo que no fuera midiendo?

N: Ah, con el teorema de Pitágoras. ¿Tengo que hacer el teorema de Pitágoras?

Era cateto más cateto opuesto igual a la hipotenusa. No, era b al cuadrado más c al cuadrado igual a d al cuadrado.

Nicte hace las operaciones en voz alta. Para sacar el valor de d saco la raíz cuadrada de 32.

S: ¿Cuál es el perímetro entonces?

N: $4 + 4 + 5.7 = 9.7$

S: Vuelve a hacer la suma.

N: 13.7

S: ¿Cuánto miden sus tres ángulos interiores?

N: 90° . Ah no, no es cierto, no es cierto. Un ángulo es de 90° y los otros dos son iguales.

S: ¿Podrías medir uno de ellos?

N: 43°

S: Entonces ¿cuánto mide el otro?

N: 153°

Nicte sumó $90 + 43 = 133$. Después restó 180 menos 133 y obtuvo 47.

Para determinar el seno y la tangente de un ángulo. Escribió las definiciones de las razones trigonométricas. Para determinar el seno del ángulo escribió la razón $\text{co}/\text{hip} = 4/5.7$ y en la tangente escribió $\text{co}/\text{ca} = 4/4$.

Análisis

El trabajo muestra evidencia de que Nicte construyó el triángulo rectángulo como un Proceso y lo coordinó con el Proceso del teorema de Pitágoras. Este último lo utiliza para determinar la longitud de la diagonal del cuadrado. Ajusta la fórmula del teorema de Pitágoras a los lados del triángulo de catetos b y c, hipotenusa d. Sustituye los valores y aproxima el valor de d. Construyó las razones trigonométricas como Acción, escribió la definición de ellas y las aplicó para determinar las razones solicitadas. Nicte cometió errores aritméticos como lo hacía en las sesiones de trabajo.

4.5 Conclusión

Los resultados de la intervención didáctica con Nicté y Yamil que se exponen en el presente capítulo permiten observar cómo la vulnerabilidad, influye en el aprendizaje matemático. En ambos casos, se identificaron vacíos conceptuales en nociones elementales de geometría y dificultades recurrentes en los procedimientos aritméticos, así como en la formalización de las respuestas. Estas limitaciones no pueden comprenderse únicamente como deficiencias cognitivas, sino como manifestaciones de trayectorias escolares fragmentadas y atravesadas por experiencias de desigualdad social.

En el caso de Nicté, se evidenció la construcción de Acciones y el avance hacia la construcción de Procesos y, en algunos momentos, de Objetos, como en el caso del triángulo rectángulo y las razones trigonométricas. Sin embargo, la necesidad de apoyarse en trazos auxiliares y la persistencia de errores aritméticos revelan la fragilidad de estos aprendizajes. Yamil, por su parte, recurrió frecuentemente al método de ensayo y error, mostró dificultades motrices en el uso de instrumentos geométricos y una menor disposición a formalizar procedimientos. No obstante, logró avances significativos en la construcción de Procesos como el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras, y logró establecer conexiones entre conceptos que evidenció en el Mapa Conceptual. Ambos casos muestran que, incluso en contextos de vulnerabilidad, es posible favorecer el desarrollo matemático mediante intervenciones didácticas que acompañen de cerca la actividad de los estudiantes y tomen en consideración aspectos cognitivos y afectivos.

El análisis desde la teoría APOE permitió describir las construcciones mentales que elaboraron las adolescentes. Sin embargo, desde el plano cognitivo resulta difícil explicar cómo factores sociales, afectivos y emocionales inciden en la actividad matemática. En Nicté, la dificultad para trabajar colaborativamente y la inseguridad en sus respuestas revelaron la influencia de la vulnerabilidad frente a su conocimiento. En Yamil, la interferencia de problemas personales en su desempeño mostró cómo las condiciones emocionales impactan directamente en la resolución matemática. Estos hallazgos reafirman que los estudiantes en situación de vulnerabilidad aprenden matemáticas desde posiciones atravesadas por desigualdades que no pueden abordarse solo desde el plano cognitivo.

En este sentido, se hace necesario complementar APOE con enfoques afectivos o sociales, que permitan comprender cómo las estudiantes que viven en casas hogar no solo enfrentan la tarea de

construir conceptos matemáticos, sino también la de desarrollar confianza y seguridad en su aprendizaje de las matemáticas. Conocimiento que históricamente se ha asociado a la exclusión. Las respuestas a los exámenes de evaluación de conocimientos, muestran que, cuando se aplica una intervención didáctica sensible a las condiciones de vulnerabilidad, las adolescentes logran avances significativos en la construcción de conceptos matemáticos. Sin embargo, los resultados también advierten que estos avances pueden ser frágiles si no se consolidan mediante un trabajo sostenido que tome en cuenta tanto lo cognitivo como lo emocional, afectivo y social.

En conclusión, la experiencia con Nigte y Yamil confirma que la vulnerabilidad condiciona el aprendizaje matemático de manera compleja, pero no lo determina de forma definitiva. Las intervenciones didácticas diseñadas desde un enfoque integral tienen el potencial de abrir caminos hacia aprendizajes y hacia una educación matemática más inclusiva, que reconozca tanto las capacidades cognitivas de los estudiantes como las condiciones emocionales y sociales que inciden en la construcción del conocimiento matemático.

En el siguiente capítulo se presentan la discusión que se desprenden de estos resultados.

CAPÍTULO 5

Discusión y conclusiones

5.1. Introducción

En este capítulo se presenta la discusión de los resultados mostrados en el capítulo anterior y las conclusiones del trabajo. En la primera parte se analizan elementos cognitivos y sus logros; así, la sección 5.2 destaca un resultado relacionado con la implementación de la intervención didáctica que consistió en la construcción de un Esquema. Posteriormente, en la sección 5.3 se importancia de los conocimientos previos en la construcción de conocimiento y su relación con el contexto de vulnerabilidad de la población de estudio. En la sección 5.4 “Resultados en contexto” se analiza la influencia que tiene la trayectoria de vida de las adolescentes en su aprendizaje de las matemáticas. A continuación, en la sección 5.5 se ofrece una reflexión sobre la gestión docente, en la sección 5.6 se aborda lo referente al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas como un aporte a la justicia social. En la siguiente sección se expone la aplicación de la intervención didáctica a otros grupos poblacionales, en la sección 5.8 se dan respuesta a las preguntas de investigación. Por último, en las dos secciones finales se presentan las recomendaciones y futuras líneas de investigación, así como las conclusiones del estudio.

5.2 La construcción de un Esquema

Un esquema en el contexto de las matemáticas puede definirse como una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que un individuo ha construido mentalmente. Estas estructuras que están interrelacionadas de manera consciente o inconscientemente, conforman un marco coherente que puede ser utilizado al enfrentar situaciones problemáticas relacionadas con esa área de las matemáticas. (Trigueros, 2005)

Cuando una persona se enfrenta a un problema matemático, recurre al Esquema que ha construido, compuesto por las Acciones, Procesos y Objetos y sus relaciones. Es fundamental que este esquema sea coherente, lo que implica que la persona debe reconocer las distintas situaciones en las que puede aplicarlo (Dubinsky y McDonald, 2001). Además, el Esquema puede ser tematizado como Objeto, permitiendo la aplicación de Acciones y Procesos sobre él.

El desarrollo de un Esquema se lleva a cabo en varias etapas: intra, inter y trans. En la teoría APOE, esta triada ha demostrado ser útil para evaluar la progresión del Esquema (Piaget y García, 2008). La etapa intra se enfoca en los componentes individuales que conforman la estructura del Esquema. Por ejemplo, en el caso de las figuras geométricas abarca la representación de cada figura y sus propiedades de manera independiente. Al establecer conexiones entre estos elementos, se entra en la etapa inter, donde se reconocen propiedades de las estructuras a través de relaciones locales y específicas. Finalmente, la etapa trans implica el desarrollo de la percepción del esquema como un todo coherente, permitiendo además la reflexión sobre las argumentaciones que sustentan las conexiones entre las distintas estructuras del Esquema.

Según Piaget y García (2008), el paso de una etapa a otra no se caracteriza por simples “incrementos” en el conocimiento, sino por una reinterpretación completa de los conocimientos previos. Así, en cada nueva etapa se necesita reconstruir lo que se había construido en etapas anteriores. El proceso de desarrollo de un Esquema es gradual y necesita tiempo, ya que el individuo debe reflexionar sobre sus componentes y las relaciones entre ellos. Una vez que se logra esta integración, el Esquema se tematiza, permitiendo que sea utilizado de manera consciente en la resolución de problemas.

Aunque en este trabajo no se tenía la intención explícita de construir un Esquema, la implementación de las actividades condujo a su creación. Esto se puede evidenciar en los elementos expuestos en los mapas conceptuales, presentados en las Figs. 94 y 98, elaborados por las adolescentes durante la Fase IV Sesión 3 Actividad 5 de semejanza de triángulos, los cuales reflejan la construcción de estructuras mentales sobre los conceptos de interés y sus relaciones, ya que la comprensión de un concepto depende de la habilidad para establecer conexiones entre las estructuras mentales que lo constituyen.

Como se vio en los resultados de la Fase IV Sesión 3, las respuestas a la Actividad 5 evidencian que Nigte elaboró un Esquema que permite reconocer las estructuras mentales que construyó sobre el triángulo y sus propiedades. En el mapa conceptual relaciona conceptos de todas las fases, la relaciones se establece alrededor del Objeto triángulo. De la Fase I hace referencia a la definición del triángulo y a la clasificación con respecto a la longitud de sus lados, ya que solo enuncia triángulos equiláteros e isósceles. De la Fase II enuncia que la suma de ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° , de la Fase III reconoce los triángulos rectángulos y los asocia a la expresión algebraica del teorema de Pitágoras, sin hacer mención del mismo. Por último de la Fase IV, relaciones entre triángulos escribe los criterios de congruencia de triángulos y una definición informal de la semejanza de triángulos.

La respuesta de Yamil a la Actividad 5 de las Fase IV Sesión 3 evidencian las estructuras mentales y las relaciones que construyó sobre el triángulo y sus propiedades. De la Fase I define el triángulo, su clasificación con respecto a sus lados y la desigualdad del triángulo. De la Fase II enuncia la suma de ángulos interiores de un triángulo son 180° . De la Fase III definió el triángulo rectángulo y lo relaciona explícitamente con el teorema de Pitágoras, además escribió la relación aritmética. De la Fase IV enuncia la definición de congruencias y sus criterios, e hizo referencia a la semejanza de triángulos escribiendo el criterio AAA.

5.3 Sobre los conocimientos previos

Diversos autores han mencionado la importancia de los conocimientos previos en el proceso de aprendizaje. De acuerdo con Ausubel (2000) el aprendizaje significativo es aquel donde el nuevo contenido se relaciona con experiencias o conocimientos adquiridos con anterioridad en el transcurso de la vida. Para Roa-Fuentes y Oktac (2010) la construcción de un concepto está relacionada con las estructuras previas de un individuo y las ideas que puede formarse acerca del objeto durante su interacción con él.

En el marco de la teoría APOE, para describir cómo se construye un concepto en la mente de un individuo, la DG debe incluir la descripción de las estructuras que se deben haber construido

previamente. En este sentido, en la descomposición genética propuesta en este trabajo para la construcción del triángulo y sus propiedades, se asumió que un estudiante había construido previamente: Punto-Objeto; Segmento-Objeto; longitud-Objeto, Ángulo-Objeto y Circunferencia-Objeto (radio y centro). Sin embargo, durante la aplicación de la intervención didáctica se observó que estos conceptos no habían sido construidos previamente por la población de estudio. Así que en la implementación de las actividades se reconstruyeron los conocimientos previos mencionados, pero también, sobre la marcha, se reconstruyeron algunos conocimientos que no fueron declarados en la relación de conocimientos previos porque se asumieron como construidos, tal fue el caso del concepto de triángulo, concepto cuya definición resultó ser insuficiente o errónea.

En el cuestionario de Actividad 1 de la Fase 1, las adolescentes evidenciaron no haber construido el concepto de triángulo, concepto sobre el cual se aplican Acciones para la construcción de los conceptos abordados en la DG “El triángulo y sus propiedades”. Sobre el concepto de triángulo, las adolescentes de la población de estudio escribieron definiciones imprecisas. Nigte definió el triángulo como “una figura geométrica de dos lados iguales y uno diferente”, mientras que Yamil lo definió como “una figura geométrica de tres lados iguales”. De acuerdo con Asiala et al. (1996) la comprensión de un concepto inicia con la manipulación de las construcciones mentales previas o de objetos físicos para construir Acciones. Por lo que resulta difícil construir conocimiento con base en definiciones erróneas o imprecisas. Además, cuando se enfrenta un problema matemático se recurre a los conocimientos previos sobre los conceptos involucrados en el tema, haciendo una reconstrucción del conocimiento como resultado de la reflexión sobre las condiciones del desafío planteado (Roa-Fuentes y Oktac, 2010).

5.4 Resultados en Contexto

Nigte

Desde pequeña, su vida ha estado marcada por dificultades. Abandonada por sus padres, ingresó a la casa hogar a los tres años de edad. Realizó su educación primaria en un colegio particular, el cual otorgaba becas a la población de la casa hogar. Sin embargo, debido a diversos problemas, fue expulsada. La secundaria no fue más fácil. Comenzó sus estudios, con beca, en otro colegio particular, pero también tuvo que abandonarlo por situaciones conflictivas, por lo que

terminó validando este nivel educativo en el INEA mediante la presentación de exámenes. Su vida es muy cerrada y a pesar de ser muy joven, no sale a la calle ni interactúa con otros. No tiene amigos con quienes convivir.

Su actitud ante la vida esta marcada por el conflicto: nada le gusta, ni siquiera la comida, la cual siempre le parece desagradable. Ha vivido eventos significativos, uno de ellos fue que rechazó la idea de ser adoptada, otro, fue la pérdida de su festejo de 15 años por problemas con su actitud.

No conoce su historia, ni sabe cómo llegó a la casa hogar. Vive con miedo constante al fracaso, lo que la hace evitar nuevas experiencias. A pesar de que le gusta leer, le cuesta trabajo procesar la información que se le presenta. Nicté desea ingresar a una preparatoria de la UNAM y le gustaría estudiar diseño de modas o lingüística (interprete).

A la pregunta, ¿cómo te sientes con respecto a las matemáticas? Nicté respondió que no se siente capaz en matemáticas, pero como debe presentar el examen de ingreso al nivel medio superior, quiere intentarlo y lo expresa claramente “No me siento capaz de ellas pero al menos lo quiero intentar”. De acuerdo con lo que dice, ve las matemáticas como un obstáculo que tiene que enfrentar y desde pequeña las ha considerado complejas; ella menciona “Cuando iba en la primaria tenía una maestra para todas las materias y eso era muy confuso y solía distraerme, así que no les entendía” y “No me gustan las matemáticas porque son muy difíciles”. Para Nicté las matemáticas son una puerta de entrada al bachillerato: “No es como me sienta, sino como las veo y no me gustan por como me las enseñaban poco a poco he tenido que luchar contra ellas y es difícil, pero para todo se utilizan y más ahora que tengo que practicar para el comipems”.

La vulnerabilidad de Nicté se expresa en diferentes ámbitos. A nivel personal, Nicté expresó en la primera entrevista que “Me gustaría ser una persona normal”, lo que sugiere que la experiencia de vivir en una casa hogar la hace sentir diferente. Durante la entrevista, la pedagoga de la casa hogar comentó que las personas que ahí viven, “no tienen sentimientos de pertenencia”. Otro comentario de Nicté que refleja esto fue “No me gustan las vacaciones”, lo que confirma que no se siente bien con su situación de vida, ya que en lugar de que las vacaciones sean un tiempo que la alejen de la rutina, para Nicté, podrían ser un recordatorio de su realidad.

El autoconcepto se entiende como las ideas que una persona tiene sobre sí misma, las cuales se fundamentan en su interacción con los demás y en la evaluación que realiza sobre sus propias acciones (Shavelson et al., 1976). En la etapa de la adolescencia, el autoconcepto experimenta cambios significativos, vinculados al avance del desarrollo cognitivo y a la variedad de contextos donde se desenvuelven los jóvenes. (Denegri et al., 2007; Lagos-San Martín et al., 2016). En particular, el autoconcepto matemático se refiere al conjunto de percepciones que una persona tiene en relación con su rendimiento en matemáticas (Pérez y Díaz, 2008). Nichte comentó de manera literal en las sesiones de trabajo “Yo con la geometría soy muy mala” (F1-S1-I6). En el desarrollo de la Actividad 3 de la Fase 2 dijo, “Miss me gusta mucho tu letra. La mía es muy panzona y no me gusta.” y en la Actividad 1 de Fase 3, Nichte construyó una caja y dijo “tengo manos de chorlito”. Aunque estos comentarios no se refieren directamente al autoconcepto matemático, sí reflejan una actitud de autoevaluación negativa.

La familia puede considerarse como la unidad fundamental de la sociedad. Satisface las necesidades de sus integrantes para que puedan encontrar realización en el presente y estar listos para el futuro (Estrada, 1992). En las casas hogar, hay personal que tienen la capacidad de satisfacer las necesidades básicas y de cuidado de las niñas y adolescentes que residen allí. No obstante, en el caso de los niños que han sido abandonados, la situación no solo les deja una autoestima muy baja, sino que también les proporciona una perspectiva del mundo que les parece hostil e insegura; esto se debe a que los padres, quienes son cruciales para ellos, los han rechazado. Además, estos niños tienden a reflejar sentimiento de frustración, agresividad, inseguridad e inadecuación hacia el entorno, lo que se debe a la escasa atención recibida de sus padres, por lo que tienen pocas expectativas de los demás (Braudy, 1998). Como se mencionó previamente, Nichte fue una niña que fue abandonada por sus padres durante sus primeros años de vida. Esta circunstancia podría manifestarse en su dificultad para socializar y trabajar de manera colaborativa, como ella misma comenta: “Yo soy muy competitiva, me molesta que alguien sepa más que yo” o “No me gusta trabajar en equipo, porque no me gusta ver mis ideas en otros”.

Se eligió el término interferencia para referirse a la alteración o perturbación en el desarrollo normal de una actividad. Esta alteración puede influir de manera positiva o negativa en la sesión. En el análisis de las interferencias se identifica una que tiene un impacto positivo, la cual se

manifestó en la segunda sesión de la fase 2 (F2-S2-I1). Esta interferencia inició con la respuesta de las adolescentes a una evaluación. Nichte completó la evaluación de forma apresurada y cometió muchos errores. Más tarde, se unió Dzan, una adolescente que no había participado en las sesiones porque asiste a la secundaria en el turno matutino. Dzan expresó que no conocía o no recordaba los conceptos que se evaluaban en la sesión. Nichte le explicó los conceptos relacionados con los ángulos que se habían visto hasta el momento, abarcando desde el concepto de ángulo, su medición, ángulos complementarios y suplementarios, hasta ángulos opuestos por el vértice y la relación de los ángulos formados entre paralelas cortadas por una secante. En su explicación incluyó la demostración de la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice. Respondió con Dzan la evaluación y en esa ocasión no cometió errores. Este fue un acto de metacognición. La cognición se refiere a las funciones mentales que se centran en recordar, comprender, enfocar la atención y procesar la información. En cambio, la metacognición se refiere al conocimiento y la regulación de los propios procesos cognitivos al realizar una tarea determinada (Correa et al., 2002). Existen diversos modelos de la metacognición. Schraw y Dennison (1994) presentan un modelo que se ocupa del conocimiento de la cognición y su regulación. Clasifican el conocimiento en tres categorías; conocimiento declarativo, conocimiento de procedimiento y conocimiento condicional. En este contexto, Nichte utilizó el conocimiento de procedimiento que abarca las estrategias y métodos para resolver un problema o aumentar el conocimiento, así como el conocimiento condicional, que se refiere al entendimiento de cuándo y por qué aplicar una estrategia particular. Es muy probable que mientras Nichte le explicaba a Dzan, también se estaba explicando a sí misma.

Yamil

Yamil tiene 14 años y creció en un entorno familiar complicado, lo que llevó a la pérdida de la patria potestad debido a la violación de su derecho a la protección. Vivía con su madre, quien tiene problemas para leer y escribir, profesa una religión muy cerrada y se dedica a vender frutas y verduras en la entrada de un mercado. Yamil cursa, con gran rezago académico el tercer grado en una Escuela Secundaria Técnica vespertina de la Ciudad de México. Según la directora de la casa hogar mencionó que tenía más de dos años de no asistir a la escuela. Lo que confirma Yamil: “En sexto llegué a faltar más de medio año, pero todavía me dieron mi certificado. En primero por muchos problemas solo llegué a ir uno o dos meses del año, falté y me iba a buscar la de trabajo

social y pues llamaba a mi mamá, me iba a buscar y al día siguiente asistía a la escuela. Llegaba a asistir y luego ya no asistía. Así me la pasé hasta segundo grado y después empezó lo de la pandemia y pues ya no asistí. En segundo para lo de en línea solo fui por mis libros, llegué a conocer a la profesora de música, muy buena onda, siempre estuvo ahí conmigo. Y pues en segundo de secundaria ya no asistí a la escuela”. Yamil recuerda que intentó entregar algunos trabajos. Fue el 24 de febrero cuando asistí 2 o 3 meses, no lo recuerdo bien y luego volví a ausentarme; creo que no vieron un gran desempeño en mí, no vieron que me esforzara tanto. Pero honestamente, “La verdad a veces si me rompía, me estresaba la escuela, me estresaba muchísimo, muchísimo, me estresaba ver a mis compañeros, veía que mis profesoras decían, que me estaban esperando, que si les entregaba ciertas tareas, podía aprobar”. Después fue cuando llegué a la casa hogar. Según la directora, llegó en estado de desnutrición severa, aunque con 10 kilos más de peso. Yamil tiene contacto con su madre cada dos semanas, lo que altera su rutina. La directora afirma que “Yamil ocupa el primer lugar en calificaciones en la casa hogar y solo necesitaba una oportunidad”. Aspira a entrar al CONALEP para estudiar dos carreras técnicas: contabilidad y asistente administrativa de empresas, antes de continuar su educación universitaria en gastronomía.

A la pregunta, ¿Cómo te sientes con respecto a las matemáticas? Yamil respondió que “en mi casa a veces me ponían a estudiar, pero muy poco y no se me quedaban grabadas las cosas hasta volver a escuchar el tema en la escuela lo recordaba”. No obstante, Yamil reconoce su capacidad y comenta, “Me siento muy capaz de entender las cosas con facilidad si me lo explican bien”. En cuanto a las matemáticas dice, “Con las matemáticas no me llegué a estresar o desesperar”.

La familia desempeña un papel fundamental en el desarrollo del individuo. Según Soifer (1979) su objetivo es proteger la vida, que se resume en dos aspectos: la enseñanza y el aprendizaje. Es en el entorno familiar donde el niño establece sus primeras interacciones y aprende valores y conductas, entre otras cosas. Los niños que crecen en entornos nocivos, con falta de cuidados consistentes, forman vínculos pobres y carentes de afecto. Existe una conexión significativa entre el maltrato físico en la niñez y la conducta agresiva en la adolescencia (Coohey, 1996). Esta situación se evidencia durante el desarrollo de la sesión 3 de la Fase 1, en la que se programó que las adolescentes llevaran a cabo una actividad que se había realizado en la sesión anterior con las niñas y adolescentes de la casa hogar. La sesión se desarrolló con muchos tropiezos porque Nichte

estaba resolviendo una situación delicada con la directora. La actividad comenzó con una evaluación y la preparación de lo que se llevaría a cabo con la comunidad. Yamil mostraba entusiasmo por participar. Sin embargo, no se pudo realizar la actividad prevista después de la conferencia porque Yamil se volvió autoritaria y agresiva con las niñas, impidiéndoles moverse y tocar cualquier cosa, hablándoles de manera violenta y amenazante. Cuando Nichte se incorporó a la sesión, Yamil intentaba aplicar la actividad con las niñas de la casa hogar. Nichte se molestó y cuestionó a Yamil: “¿Y tú, qué te sientes?”, “¿Por qué nos hablas así?”. Al final la docente tuvo que implementar la actividad con la comunidad de la casa hogar.

En el contexto de la educación matemática, uno de los desafíos es entender de qué manera las trayectorias educativas interrumpidas afectan en el pensamiento matemático, en este estudio, el interés es con la población de adolescentes que viven en CH, donde las condiciones de vida previas a la residencia en la CH, suelen caracterizarse por la inestabilidad emocional y la falta de continuidad en la educación, lo que tiene un impacto cognitivo importante. Como se mencionó anteriormente, en matemáticas un nuevo concepto se construye a partir de los conocimientos previos. Cuando la asistencia a la escuela se interrumpe, se producen vacíos conceptuales que dificultan el aprendizaje posterior (Schmidt, Houang y Cogan, 2002). En adolescentes que han experimentado periodos sin escolarización, estos vacíos se manifiestan en dificultades en el manejo de conceptos básicos. Por otro lado, la falta de continuidad escolar no solo afecta el rendimiento académico, sino que también dificulta las relaciones afectivas con compañeros y docentes, elementos esenciales para el aprendizaje (Perry y Szalavitz, 2006). Esto lo comenta Yamil al relatar en su historia que regresar a la escuela tras periodos de inasistencia le generaba mucho estrés y que se sentía presionada cuando los maestros le decían “te estamos esperando”.

Los periodos de inasistencia a la escuela también podrían estar vinculados a la dificultad que se observó en el trabajo de Yamil en relación con la escasez de destrezas motrices necesarias para utilizar el compás, el transportador y las tijeras. Un ejemplo se presenta en la interferencia (F3-S2-II) que hace referencia al momento en que las adolescentes recortaban el desarrollo plano de una caja para la actividad introductoria del teorema de Pitágoras, Yamil tuvo dificultades para cortar con las tijeras siguiendo una línea y mencionó, “De verdad que no soy buena para cortar y tampoco para construir. ¿Por qué me ponen puras cosas que no sé hacer?” La escasa coordinación a la hora

de manejar el compás y las tijeras representa un obstáculo para la participación de Yamil en las actividades.

5.5 Gestión docente

En el contexto de adolescentes que viven en casas hogar, el papel del docente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas adquiere un relevancia fundamental, ya que se constituye como mediador de los procesos cognitivos y afectivos de las adolescentes, como respuesta a las condiciones de vulnerabilidad social y educativa. La labor docente en este escenario no se limita a la transmisión de contenidos matemáticos, sino que implica tanto la creación de condiciones para la construcción del conocimiento, como la consolidación de un entorno de afecto y seguridad que garantice la inclusión.

En lo que se refiere a la práctica docente, las decisiones, la organización del contenido, la gestión del aula y la forma en que el profesor presenta el conocimiento matemático determinan las condiciones en las que los estudiantes pueden generar aprendizajes significativos (García et al., 2012; Gavilán et al., 2007). Asimismo, comprender la enseñanza requiere integrar perspectivas cognitivas y socioculturales (Even y Schwarz, 2003), lo cual resulta particularmente relevante en entornos donde la diversidad y la vulnerabilidad son elementos constitutivos del aprendizaje.

La práctica docente en esta investigación está ligada al marco teórico. Desde la perspectiva cognitiva de la teoría APOE, el papel del docente consiste en identificar las estructuras mentales necesarias para aprender un concepto y diseñar actividades que faciliten a los estudiantes la construcción de dichas estructuras mentales (Arnon et al., 2014). La descomposición genética (DG), permite al docente identificar, seleccionar y diseñar actividades que respondan a los procesos de construcción del conocimiento matemático (Gavilán et al., 2007). Sin embargo, en el marco de APOE, la investigación mostró que no basta con declarar los “conocimientos previos” en la DG, sino que se hace necesario reconocer y reconstruir lo que se denominó “previos de los previos”, es decir, conocimientos básicos que no se habían construido y que resultan imprescindibles para avanzar en la construcción de otros conceptos. Así, por ejemplo, en el trabajo con ángulos y su medición en la Fase II, se revisó de forma reiterada el uso de instrumentos como el compás y el

transportador, lo que se convirtió en un paso indispensable para posibilitar la construcción de Objetos como el triángulo rectángulo.

Tal como se mencionó antes, la teoría APOE utiliza el ciclo ACE, que se refiere a Actividades, Discusión en Clase y Ejercicios. En esta parte, la gestión docente respalda la ejecución de las actividades, orienta la discusión en clase, ofrece explicaciones y consolidan el trabajo de los estudiantes. La práctica docente, en esta investigación, se caracterizó por la flexibilidad y la capacidad de adaptación. La flexibilidad se refiere a la habilidad de la docente para llevar a cabo las actividades ya sea con una, dos o tres alumnas, o con la comunidad completa, como sucedió en la actividad 7 de la Fase II que se desarrolló en un día feriado, en el cual se encontraba toda la comunidad en la CH. En esta actividad se realizó la demostración de que la suma los ángulos interiores de un triángulo es 180° , no solo con las tres adolescentes que presentarían el examen de COMIPEMS, sino con ocho niñas o adolescentes de diferentes niveles educativos que se quisieron incorporar a la sesión. Por otro lado, la adaptabilidad se refiere a la capacidad para modificar sobre la marcha la planeación de las sesiones. Un ejemplo de ello se presenta en la Actividad 5 de la Fase IV de Relaciones entre Triángulos: Congruencia, cuando después de haber trabajado todas las actividades del tema de Congruencia, fue necesario reconstruir los conceptos abordados en la sesión anterior, debido a que las respuestas de las alumnas evidenciaban que no habían construido la congruencia como Acción. En este sentido la adaptabilidad permitió reconstruir sesiones en función de las necesidades reales de las adolescentes cuando los aprendizajes no se habían consolidado.

Por otro lado, en el desarrollo de las sesiones se generaron interferencias. De acuerdo a lo reportado en el capítulo IV de Resultados, algunas de estas interferencias se debían a la dinámica de la casa hogar, como son las pausas obligatorias para tomar la colación o la inasistencia de alguna adolescente por ir al dentista o al psiquiatra. Frente a ello, la docente diseñó mecanismos para retomar el trabajo o revitalizar el proceso de aprendizaje. Entre estos mecanismos, se cuenta con la recapitulación de contenidos o la aplicación de ejercicios apropiados para cada situación. La posibilidad de adaptar las sesiones sobre la marcha no solo permitió dar continuidad a las estructuras mentales en construcción, sino que también aseguró que las estudiantes no quedaran excluidas de la dinámica de aprendizaje. Dichas adaptaciones, ancladas en la teoría APOE y

orientadas por la DG, permitieron que las adolescentes pudieran construir conocimiento matemático en condiciones de vulnerabilidad.

Por otro lado, como se mencionó la gestión docente no solo organiza contenidos, sino que también articula el Espacio de Condiciones de Posibilidad que favorece la construcción de conocimiento matemático con el acompañamiento afectivo que requiere. De acuerdo con Piaget (1962) se reconoce que la cognición no puede separarse del afecto, lo que subraya la importancia de la generación del entorno de seguridad y afecto positivo. En este campo, la práctica docente incluyó la escucha atenta y respetuosa a cualquier duda o comentario de las adolescentes, la retroalimentación positiva que valora el esfuerzo tanto como el resultado y la creación de acuerdos de convivencia que favorecieran un clima de respeto y cordialidad dentro del grupo. Estos elementos se reflejaron en la disminución del número de interferencias observadas durante las actividades y de manera significativa, en la continuidad educativa de las adolescentes hacia el nivel medio superior, reduciendo así su riesgo de exclusión social y educativa, todo lo cual puede considerarse un logro de la gestión docente.

Por todo esto, el papel del docente en la enseñanza de las matemáticas en adolescentes que viven en casas hogar se configura como una práctica integral que articula lo cognitivo y lo afectivo. La integración de la teoría APOE con la pedagogía inclusiva, donde el diseño de actividades cognitivamente se entrelaza con la construcción de un entorno afectivo y seguro, muestra que la docente no solo promueve la construcción de conocimiento, sino que también incide en la continuidad educativa y en la reducción de riesgos de exclusión, aportando así a la construcción de trayectorias escolares mas justas y sostenibles para adolescentes en situación de vulnerabilidad.

5.6 La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como aporte a la justicia social

Estudiar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con adolescentes que viven en casas hogar representa una contribución significativa al campo de la educación matemática desde la perspectiva de la justicia social, ya que visibiliza una forma de exclusión que ha sido poco abordada en la investigación (Valero, 2012). A diferencia de los grupos poblacionales identificados en la revisión de literatura sobre vulnerabilidad, adultos con baja numeracidad, personas

desplazadas, población con discapacidad e indígenas o aborígenes, las adolescentes que viven en casas hogar han recibido poca atención dentro del campo de la educación matemática, a pesar de que enfrentan diversos factores de vulnerabilidad, como son, abandono, dificultad económica, violencia, inestabilidad afectiva, interrupciones en su educación y rezago académico (UNESCO, 2017; Thompson et al., 2018).

Algunos investigadores afirman que la justicia social en el campo de la Matemática Educativa promueve el desarrollo de herramientas de análisis crítico necesarias para entender la opresión (Adams et al., 2007; Skovsmose, 2011); otros la ven como un compromiso para cambiar las condiciones que provocan la desigualdad en el acceso, uso y comprensión del conocimiento matemático (Gutstein, 2006); hay también quienes se refieren a estudiantes que enfrentan obstáculos en sus oportunidades educativas (Jiménez et al., 2017). Alineada a esta última perspectiva, la intervención propuesta en esta investigación busca favorecer la inclusión de la población de estudio y crear condiciones equitativas de participación en el ámbito escolar. En este sentido, la justicia social no se limita a la inclusión física en el aula, sino que demanda que todos los estudiantes, particularmente aquellos históricamente marginados, tengan acceso a formas de pensar matemáticamente que les permitan entender, actuar y transformar su entorno (Gutiérrez, 2009).

El enfoque de justicia social también aborda la importancia de reconocer las voces, identidades y saberes de los individuos, lo que implica adoptar una postura ética y crítica (Civíl, 2016). En lugar de centrarse en lo que las adolescentes “no saben” o “no tienen”, esta investigación propone coordinar recursos afectivos y cognitivos para la construcción de conocimiento matemático en condiciones adversas y apuesta por una intervención temprana para evitar la reproducción de procesos de exclusión documentados en la vida adulta, como es la precarización laboral o el endeudamiento derivado de la baja numeracidad (Gal et al., 2020; Reder, 2020). Esto apoya la transformación de las prácticas educativas hacia enfoques más inclusivos, lo que enriquece la investigación en educación matemática, planteando alternativas pedagógicas que reconozcan la diversidad, la dignidad y el derecho a aprender (Nasir et al., 2008).

5.7 Respuesta a las preguntas de investigación

A partir de los resultados obtenidos en el apartado 5 se formulan la respuesta a las preguntas por caso, al final se acompaña de una comparación de ambos casos.

Caso Nichte

En relación con la primera pregunta de investigación, *¿qué construcciones acerca de los conceptos matemáticos seleccionados desarrollan las adolescentes de la CH?*, el análisis del caso de Nichte muestra un avance en la construcción de los conceptos seleccionados en la DG titulada el triángulo y sus propiedades. Inicialmente, el trabajo de Nichte evidencia construcciones en el nivel de Acción, como en el trazo de triángulos apoyándose en segmentos auxiliares horizontales o en la aplicación mecánica de definiciones y algoritmos. Posteriormente, se observan la interiorización a Proceso, particularmente en la clasificación de triángulos, los ángulos opuestos por el vértice, la suma de los ángulos interiores de un triángulo y el teorema de Pitágoras, ya que Nichte es capaz de utilizar estos conceptos para resolver problemas con ellos, además de coordinarlos en distintas actividades. Finalmente, se identifica la encapsulación del Objeto triángulo rectángulo, sobre el cual es capaz de operar para desencapsular sus elementos y aplicar las razones trigonométricas.

El trabajo de Nichte también da cuenta de la coordinación de procesos, por ejemplo, entre semejanza de triángulos y suma de ángulos interiores, o entre triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras. Estas coordinaciones se evidenciaron en la elaboración del mapa conceptual, que expuso la manera en que integra diferentes conceptos matemáticos. No obstante, las construcciones alcanzadas presentan un carácter incipiente y poco formal, lo que se observa en la organización fragmentada de sus procedimientos y en la persistencia de errores aritméticos básicos.

Respecto a la segunda pregunta, *¿qué obstáculos en el aprendizaje de los conceptos matemáticos seleccionados se evidencian en las adolescentes de casas hogar y cómo se relacionan con las condiciones de vulnerabilidad en las que viven?*, el caso de Nichte permite identificar obstáculos cognitivos y afectivo. Entre los primeros, se encuentran la dificultad para generalizar procedimientos, como en el trazo de triángulos que siempre inicia con segmentos auxiliares; la frecuencia de errores aritméticos en sumas, restas y potencias; y la falta de formalidad en sus procedimientos, que se manifiesta en omisiones de signos de igualdad o en la disposición desordenada de los cálculos. Estos elementos revelan un obstáculo, que en ciertas ocasiones hace que algunos conceptos que se han construido como Acción no se interioricen en Procesos.

En cuanto a los obstáculos afectivos, estos se expresan en actitudes de inseguridad, resistencia al trabajo colaborativo y bloqueos frente a la introducción de términos desconocidos, como en el caso de “catetos” e “hipotenusa”. Tales comportamientos sugieren una relación estrecha entre el aprendizaje matemático y las condiciones de vulnerabilidad, producto de su trayectoria de vida. La falta de continuidad educativa, las experiencias emocionales adversas y la limitada disponibilidad de acompañamiento académico inciden en la disposición de Nigte para enfrentar retos cognitivos, perseverar ante la dificultad y validar sus propios conocimientos.

Caso Yamil

En cuanto a la primera pregunta de investigación, *¿qué construcciones acerca de los conceptos matemáticos seleccionados desarrollan las adolescentes de la CH?*, el análisis del caso de Yamil muestra un avance en la construcción de los conceptos incluidos en la DG titulada el triángulo y sus propiedades, aunque su trabajo está relacionado a sus condiciones de vulnerabilidad. Inicialmente, Yamil no había construido el Objeto triángulo, y sus trazos se limitaban a utilizar métodos de ensayo y error. Sin embargo, a lo largo del desarrollo de las actividades y de la retroalimentación docente, logra reproducir el procedimiento con regla y compás, lo que paulatinamente la lleva a construir el trazo de triángulos y su clasificación como Acción.

El trabajo de Yamil, evidencia que construye conceptos en nivel de Acción, tales como ángulos complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice y relaciones en ángulos formados por paralelas cortadas por una secante, al igual que congruencia y semejanza. Al mismo tiempo, interioriza algunos conceptos como Proceso, en particular en la suma de los ángulos interiores de un triángulo, en la identificación del triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras. Procesos que además coordina. El mapa conceptual que elabora Yamil relaciona distintos conceptos como desigualdad del triángulo, clasificación de triángulos, triángulo rectángulo y congruencia. Finalmente, en lo que se refiere a la trigonometría, Yamil aplica las razones trigonométricas en triángulos rectángulos, lo cual constituye evidencia de una construcción Acción del tema.

En relación con la segunda pregunta, *¿qué obstáculos en el aprendizaje de los conceptos matemáticos seleccionados se evidencian en las adolescentes de casas hogar y cómo se relacionan con las condiciones de vulnerabilidad en las que viven?*, el caso de Yamil permite identificar obstáculos cognitivos y afectivos. Entre los primeros destacan las dificultades de coordinación en

el uso de instrumentos como compás, transportador y tijeras, lo que limita su desempeño en tareas geométricas básicas; la tendencia a resolver problemas mediante el método de ensayo y error, sin formalizar procedimientos; y la falta de precisión en la representación y escritura de operaciones. Estos obstáculos muestran que varios conceptos permanecen en un nivel de Acción y la evidencia muestra que no alcanza a interiorizarse en Proceso.

Por otro lado, los obstáculos afectivos se reflejan en la inseguridad de Yamil frente a los contenidos matemáticos, en su renuencia inicial a escribir procedimientos, y en el impacto directo que factores emocionales personales tienen sobre la organización de su trabajo, como se observó en las sesiones de trigonometría. Estas dificultades no pueden comprenderse de manera aislada de las condiciones de vulnerabilidad como son: trayectorias escolares fragmentadas, falta de acompañamiento académico y situaciones emocionales complejas. Su contexto incide tanto en la dimensión motriz (coordinación en el manejo de instrumentos), como en la disposición a perseverar en la tarea y en la confianza en su propio trabajo matemático.

Comparación entre los casos de Nigte y Yamil

El análisis comparativo entre el trabajo de Nigte y Yamil permite identificar similitudes u diferencias en la construcción de conceptos matemáticos y en los obstáculos que emergen durante el proceso de aprendizaje.

En cuanto a las similitudes, ambas adolescentes logran construir Acciones de algunos conceptos como Congruencia y Semejanza, e interiorizar Procesos, particularmente en los conceptos de la suma de los ángulos interiores del triángulo, la identificación del triángulo rectángulo y la aplicación del teorema de Pitágoras. Asimismo, tanto Nigte como Yamil evidencian la coordinación de Procesos, lo que muestra un avance hacia la conformación de un Esquema integrado por los conceptos de la DG, aunque de manera incipiente y poco formal. Finalmente, en ambas se observa la influencia de obstáculos afectivos, expresados en inseguridad ante nuevos términos, y en diferente grado, resistencia al trabajo colaborativo y a la formalización matemática.

En lo que respecta a las diferencias, En cuanto a los obstáculos cognitivos, el trabajo de Nigte evidencia persistencia de errores aritméticos básicos, lo cual limita la consolidación de las construcciones mentales. Por otra parte, Yamil logra interiorizar algunas Acciones en Procesos,

aunque sus construcciones permanecen frágiles debido a obstáculos afectivos intensificados por sus condiciones de vulnerabilidad. Yamil también enfrenta retos específicos en la coordinación motriz con instrumentos geométricos y en la precisión de trazos. Los obstáculos afectivos se manifiestan de manera distinta en las adolescentes, en Nigte se expresan como inseguridad frente a conceptos desconocidos y resistencia a validar sus conocimientos, mientras que en Yamil se relacionan de manera más directa con su estado emocional, llegando a afectar la lógica y organización de sus procedimientos.

Por último, en 2022 se presentaron 282 mil 596 aspirantes al examen de ingreso a Nivel Medio Superior de los cuales el 73.6% obtuvo una de las primeras cinco opciones seleccionadas. Los resultados del examen de ingreso al nivel medio superior se publicaron dos meses después de la presentación del examen. La directora de la CH comentó que las adolescentes ingresaron al bachillerato. Nigte tuvo una calificación de 75 puntos, Yamil 68 y después Dzan 60. Todas alcanzaron un lugar, sin embargo, no fue de sus primeras opciones.

5.8 Recomendaciones y futuras líneas de investigación

A partir de los resultados obtenidos en esta investigación, se identifican varias líneas para investigaciones futuras. En primer lugar, es necesario profundizar en el análisis de las construcciones mentales que las adolescentes que viven en CH desarrollan acerca del triángulo y sus propiedades, con el propósito de refinar la descomposición genética y fortalecer la propuesta didáctica.

Es esencial llevar a cabo un seguimiento a mediano y largo plazo del aprendizaje de estas adolescentes, para evaluar cómo los conceptos geométricos construidos durante la implementación de esta propuesta, influyen en su desempeño en niveles educativos posteriores, en particular en materias como la geometría analítica. Asimismo, es relevante extender la intervención a otros contenidos matemáticos, como el álgebra, para investigar si las estrategias didácticas desarrolladas en este estudio pueden transferirse a otros contenidos.

Asimismo, se propone la creación de redes de colaboración entre casas hogar, escuelas, universidades y organismos públicos para desarrollar programas integrales de formación docente,

investigación aplicada y políticas educativas que consideren las situaciones de vulnerabilidad. También se deberían diseñar e implementar secuencias didácticas que tomen en cuenta elementos como las trayectorias escolares interrumpidas, la diversidad de experiencias previas y los componentes afectivos que influyen en el aprendizaje matemático en contextos de vulnerabilidad. Desarrollar un modelo teórico-práctico para la enseñanza de las matemáticas que este dirigido a grupos en situación de vulnerabilidad, integrando dimensiones cognitivas, afectivas y sociales del aprendizaje. Este enfoque podría contribuir significativamente tanto al campo de la Matemática Educativa como a la investigación interdisciplinaria en torno a inclusión, equidad y justicia social.

También se sugiere replicar la intervención en otras poblaciones vulnerables, como son estudiantes migrantes o aquellos en situación de privación de libertad, lo que permitiría identificar similitudes y diferencias en aspectos cognitivos y afectivos relacionados con el aprendizaje matemático. Sobre la implementación de la intervención didáctica en otros grupos poblacionales. Para el caso de grupos de *poblaciones vulnerables*, se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- En primer lugar, se recomienda caracterizar la vulnerabilidad de la población con la que implementará la intervención. Definir ¿qué tipo de riesgo de exclusión enfrenta este grupo? y ¿si se trata de un riesgo relacionado con temas educativos?
- Realizar una evaluación diagnóstica para determinar si la población vulnerable ha construido los conocimientos previos declarados en la DG, con el propósito de hacer ajustes si es necesario.
- La intervención didáctica requiere de materiales concretos para llevar a cabo las actividades, para ello, es esencial de disponer de papel, lápices, regla, compás, transportador y escuadras.
- A pesar de que los temas tratados en la intervención son parte del currículo del eje de geometría, se recomienda que el docente se familiarice con las actividades propuestas antes de su implementación.
- Por último, es recomendable generar un entorno de seguridad y afecto positivo que favorezca el aprendizaje. Al trabajar con poblaciones vulnerables, es fundamental ser sensible del contexto específico en el que se aplicará la intervención. Ser flexible y adaptar las actividades a la realidad de esta.

La intervención didáctica también podría ser implementada en *grupos escolares no vulnerables*. En este caso aplican las siguientes recomendaciones:

- Realizar un análisis contextual para comprender las características, necesidades, y recursos del nuevo grupo.
- Adaptar la intervención didáctica a los conocimientos previos de la población y realizar las modificaciones necesarias para que sea relevante para los alumnos.
- Considerar los materiales necesarios para realizar las actividades, que en este caso podrían ser herramientas digitales o plataformas educativas gratuitas como GeoGebra.
- La gestión docente es fundamental en cualquier contexto. El docente actúa como mediador del proceso de aprendizaje y como creador de un entorno que fomente la comunicación, la empatía y la colaboración.
- La intervención didáctica podría implementarse en aulas de escuelas secundarias para evaluar los esquemas construidos o el nivel de progreso de los alumnos de tercer año. La evaluación de los conceptos abordados en la intervención podría servir como un indicador del desempeño de los estudiantes en el siguiente nivel educativo.

Por último, es recomendable continuar investigando sobre el concepto de vulnerabilidad en la educación matemática, ampliando su definición y comprensión en función de los riesgos de exclusión que enfrentan niñas, niños y adolescentes en distintos contextos educativos.

5.9 Conclusión

La intervención didáctica en el área de matemáticas, diseñada para adolescentes en condiciones de vulnerabilidad ha demostrado ser una herramienta eficaz para superar obstáculos académicos relacionados a su contexto de vida. Este trabajo abordó de manera integral tanto los aspectos cognitivos del aprendizaje matemático como los aspectos afectivos, mediante la creación del espacio de condiciones de posibilidad que favoreciera la participación y confianza de las adolescentes.

La intervención implementada, sustentada cognitivamente en la Descomposición Genética “El triángulo y sus propiedades”, demostró ser efectiva para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático y aumentar la confianza de las adolescentes en su capacidad para continuar sus estudios y enfrentar con más autonomía el desafío de ingresar a la educación media superior.

Esta intervención permitió a las adolescentes enfrentar un reto académico inmediato y abrió las puertas a nuevas oportunidades educativas y personales que las acercan a una vida más plena. Este trabajo destaca la importancia de combinar estrategias didácticas efectivas con un apoyo afectivo, como un camino para transformar las trayectorias de vida de adolescentes que han sido históricamente marginadas y contribuir así a una educación matemática más equitativa, humana e inclusiva.

Las poblaciones vulnerables requieren de apoyo en su educación, especialmente en el ámbito de las matemáticas. Apoyar su formación matemática, mejora su condición de vida. Saber matemáticas permite que los individuos participen activamente en la sociedad, favorece la toma de decisiones informadas y con ello la transformación del mundo en el que viven (Schreiber-Barch et al., 2020).

REFERENCIAS

- Adams, M. (2007). Pedagogical frameworks for social justice education. En M. Adams, L. A. Bell, & P. Griffin (Eds.), *Teaching for diversity and social justice* (pp. 20–33). Routledge.
- Aguirre, A., Carballo, R., y Lopez-Gavira, R. (2020). Improving the academic experience of students with disabilities in higher education: Faculty members of Social Sciences and Law speak out. *Innovation: The European Journal of Social Science Research*, 1–16. <https://doi.org/10.1080/13511610.2020.1828047>
- Ainscow, M., Booth, T., Dyson, A., Farrell, P., Frankham, J., Gallannaugh, F., Howes, A., y Smith, R. (2006). *Improving schools, developing inclusion*. Routledge.
- AIHW. (2013). *Educational outcomes for children in care: Linking 2013 child protection and NAPLAN data*. Australian Institute of Health and Welfare. <https://www.aihw.gov.au/getmedia/66f5ad4b-568a-4aa9-9673-845f59c8d5ec/18983.pdf.aspx?inline=true>
- AIHW. (2018). *National framework for protecting Australia's children indicators*. Australian Institute of Health and Welfare. <https://www.aihw.gov.au/reports/child-protection/nfpac/contents/national-framework-indicatorsdata-visualisations/0-2-out-of-home-care>
- Angermeier, K., y Ansen, H. (2020). Value and understanding of numeracy practices in German debt counselling from the perspective of professionals. *ZDM – Mathematics Education*, 52, 461–472.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II* (pp. 1–32). American Mathematical Society.

- Ausubel, D. P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-94-015-9454-7>
- Berrio, L. (2014). Trayectorias reproductivas y prácticas de atención a la salud materna entre mujeres indígenas de la Costa Chica de Guerrero. En A. Sánchez Bringas (Coord.), *Desigualdades en la procreación. Trayectorias reproductivas, atención obstétrica y morbilidad materna en México* (pp. 211–244). ITACA.
- Booth, T., y Ainscow, M. (2011). *Index for inclusion: Developing learning and participation in schools* (3rd ed.). Centre for Studies in Inclusive Education.
- Braudy, L. (1998). *Psicología de las masas*. Oxford University Press.
- Civil, M. (2016). Mathematics education, cultural tools, and the navigation of boundaries. *For the Learning of Mathematics*, 36(2), 9–13.
- Civil, M., Stoehr, K. J., y Salazar, F. (2020). Learning with and from immigrant mothers: implications for adult numeracy. *ZDM — Mathematics Education*, 52(3), 489–500. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01076-2>
- Comisión Nacional de los Derechos Humanos. (2019). *Informe especial sobre la situación de los derechos de las niñas, niños y adolescentes en centros de asistencia social y albergues públicos y privados de la República Mexicana*. CNDH. <https://www.cndh.org.mx/documento/informe-especial-sobre-la-situacion-de-los-derechos-de-ninas-ninos-y-adolescentes>
- Codina Lluís. (2023, junio 19). *Estudios de caso: características, tipología y bibliografía comentada*. <https://www.lluiscodina.com/estudios-de-caso/>
- Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social. (2018). *Estudio diagnóstico del derecho a la educación 2018*. CONEVAL. https://www.coneval.org.mx/EvaluacionDS/PP/CEIPP/IEPSM/Documents/Derechos_Sociales/Estudio_Diag_Edu_2018.pdf

- Coohey, C. (1996). Child maltreatment: testing the social isolation hypothesis. *Child abuse & neglect*, 20(3), 241–254. [https://doi.org/10.1016/s0145-2134\(95\)00143-3](https://doi.org/10.1016/s0145-2134(95)00143-3)
- Covarrubias, F. (2002). *Las herramientas de la razón. La teorización potenciadora intencional de procesos sociales*. UPN.
- Correa Z., Castro Rubilar, F., y Lira Ramos, H. (2002). Hacia una conceptualización de la metacognición y sus ámbitos de desarrollo. *Horizontes Educativos*, (7), 58-63.
- Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches* (3rd ed.). SAGE.
- David, L., y Wise, S. (2016). The TEACHaR program: Achieving better education outcomes for children and young people in out-of-home care. *Developing Practice: The Child, Youth and Family Work Journal*, 45, 33.
- Denegri, M., Opazo, C., y Martínez, G. (2007). Aprendizaje cooperativo y desarrollo del autoconcepto en estudiantes chilenos. *Revista de Pedagogía*, 28(81), 13-41
- Díez-Palomar, J. (2020). Dialogic mathematics gatherings: encouraging the other women's critical thinking on numeracy. *ZDM — Mathematics Education*, 52(3), 473–487. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01092-2>
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Springer.
- Dubinsky, E., y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, M. Hillel, M. Niss, & A. Schoenfeld (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275–282). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25
- Duke, T., Farruggia, S. P., y Gerns, G. R. (2017). "I don't know where I would be right now if it wasn't for them": Emancipated foster care youth and their important non-parental adults. *Children and Youth Services Review*, 76, 65–73. <https://doi.org/10.1016/j.childyouth.2017.02.015>

- Estrada, L. (1979). *Ciclo vital de la familia*. Paidós.
- Even, R. y Schwarz, B.B. (2003). Implications of Competing Interpretations of Practice for Research and Theory in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 54(2-3), 283-313.
- Florian, L. (2014). What counts as evidence of inclusive education? *European Journal of Special Needs Education*, 29(3), 286–295.
- Florian, L. (2015). Conceptualising inclusive pedagogy: The inclusive pedagogical approach in action. En J. M. Deppeler, T. Loreman, R. Smith, & L. Florian (Eds.), *Inclusive pedagogy across the curriculum* (pp. 11–24). Emerald.
- Fonseca, M. (2020). Numeracy in Youth and Adult Basic Education: syntactic, semantic, and pragmatic dimensions of a discursive practice. *ZDM — Mathematics Education*, 52(3), 395–406. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01110-3>
- Gal, I., Grotlüschen, A., Tout, D., y Kaiser, G. (2020). Numeracy, adult education, and vulnerable adults: A critical view of a neglected field. *ZDM – Mathematics Education*, 52, 377–394.
- Gale, T., y Mills, M. (2013). Creating spaces in higher education for marginalised Australians: Principles for socially inclusive pedagogies. *Enhancing Learning in the Social Sciences*, 5(2), 7–19. <https://doi.org/10.11120/elss.2013.00008>
- García, M., Gavilán, J.M., Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada, relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*. 30(3), 219-235.
- Gavilán Izquierdo, J.M., García Blanco, M.M. y Llinares Ciscar, S. (2007). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes. *Educación Matemática* 19(2), 5–39.
- Gutiérrez, R. (2009). Embracing the inherent tensions in teaching mathematics from an equity stance. *Democracy & Education*, 18(3), 9–16.

- Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. Routledge.
- Gypen, L., Vanderfaeillie, J., De Maeyer, S., Belenger, L., y Van Holen, F. (2017). Outcomes of children who grew up in foster care: Systematic-review. *Children and Youth Services Review*, 76, 74–83. <https://doi.org/10.1016/j.childyouth.2017.02.035>
- Heilmann, L. (2020). Health and numeracy: The role of numeracy skills in health satisfaction and health-related behavior. *ZDM – Mathematics Education*, 52, 407–418.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2007). *La educación para poblaciones de contextos vulnerables. Informe 2007*. INEE.
- Jiménez, F., Lalueza, J. L., y Fardella, C. (2017). Aprendizajes, inclusión y justicia social en entornos educativos multiculturales. *Revista electrónica de investigación educativa*, 19(3), 10-23. <https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.3.830>
- Johnson, K. C., y Lampley, J. H. (2010). Mentoring at-risk middle school students. *SRATE Journal*, 19(2), 64–69.
- Jorgensen, R. (2020). Creating opportunities for vulnerable indigenous learners to succeed in vocational education. *ZDM — Mathematics Education*, 52(3), 571–580. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01117-w>
- Jurdak, M. (2020). The sociopolitical and sociocultural dimensions of migrants' adult numeracy. *ZDM — Mathematics Education*, 52(3), 515–525. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01079-z>
- Lagos-San Martín, N., García-Fernández, J. M., Inglés, C., Hidalgo, M. D., Torregrosa, M. S., y Gómez-Núñez, M. I. (2016). Self-Description Questionnaire II (versión breve): evidencia de fiabilidad y validez en una muestra de adolescentes chilenos. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 48, 69-79.

- Lindenskov, L., y Lindhardt, B. (2020). Exploring approaches for inclusive mathematics teaching in Danish public schools. *Mathematics Education Research Journal*, 32(1), 57–75. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00303-z>
- Liu, H. (2020). Low-numerate adults, motivational factors in learning, and their employment, education and training status in Germany, the US, and South Korea. *ZDM — Mathematics Education*, 52(3), 419–431. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01108-x>
- Lüssenhop, M., y Kaiser, G. (2020). Refugees and numeracy: what can we learn from international large-scale assessments, especially from TIMSS? *ZDM — Mathematics Education*, 52(3), 541–555. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01111-2>
- Mandler, G. (1984). *Mind and body: Psychology of emotion and stress*. Norton.
- Mandler, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. En D. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 3–19). Springer.
- Martin, P. Y., y Jackson, S. (2002). Educational success for children in public care: Advice from a group of high achievers. *Child & Family Social Work*, 7(2), 121–130.
- Melero, N., Domenech, A., y Cabeza-Ruiz, R. (2020). Beliefs and actions of university lecturers of Sports Sciences and Physical Activity regarding students' learning motivation. *Pedagogika*, 137(1), 45–60. <https://doi.org/10.15823/p.2020.137.3>
- Messiou, K. (2017). Research in the field of inclusive education: Time for a rethink? *International Journal of Inclusive Education*, 21(2), 146–159. <https://doi.org/10.1080/13603116.2016.1223184>
- Miller, J., Warren, E., y Armour, D. (2020). Examining changes in young Aboriginal and Torres Strait Island students and their beginning primary school teachers' engagement in the teaching and learning of mathematics. *ZDM — Mathematics Education*, 52(3), 557–569. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01077-1>

- Morgan, A., Pendergast, D., Brown, R., y Heck, D. (2015). Relational ways of being an educator: Trauma-informed practice supporting disenfranchised young people. *International Journal of Inclusive Education*, 19(10), 1037–1051. <https://doi.org/10.1080/13603116.2015.1035344>
- Moriña, A. (2020). Approaches to inclusive pedagogy: A systematic literature review. *Pedagogika*, 140(4), 134–154.
- Moriña, A., y Orozco, I. (2023). Teaching experiences of inclusive Spanish STEM faculty with students with disabilities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(3), 993–1012. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10276-4>
- Nasir, N. S., Hand, V., y Taylor, E. V. (2008). Culture and mathematics in school: Boundaries between “cultural” and “domain” knowledge in the mathematics classroom and beyond. *Review of Research in Education*, 32(1), 187–240. <https://doi.org/10.3102/0091732X07308962>
- Nortvedt, G. A., y Wiese, E. (2020). Numeracy and migrant students: A case study of secondary level mathematics education in Norway. *ZDM – Mathematics Education*, 52, 527–539.
- Organización de las Naciones Unidas. (2006). *Convención de los derechos de las personas con discapacidad*. ONU.
- Pérez, J. (2017). El desarrollo afectivo según Jean Piaget. *Revista Vinculando*, 15(1). https://vinculando.org/psicologia_psicoterapia/desarrollo-afectivo-jean-piaget.html
- Pérez, M.V., y Díaz, A. (2008). "Valoración de un programa de docencia para facilitar el aprendizaje activo y autorregulado". Proyecto FONDECYT N° 1080240.
- Perry, B.D., y Szalavitz, M. (2006). *El niño criado como perro y otras historias del cuaderno de un psiquiatra infantil: Lo que los niños traumatizados pueden enseñarnos sobre la pérdida, el amor y la sanación*. Basic Books/Hachette Book Group.
- Piaget, J. (1954). Les relations entre l’intelligence et l’affectivité dans le développement de l’enfant [La relación entre la inteligencia y la afectividad en el desarrollo del niño]. *Bulletin de Psychologie* [Boletín Psicológico], 7, 143-50, 346-61, 522-35, 699-701.

- Piaget, J. (1962). The relation of affectivity to intelligence in the mental development of the child. *Bulletin of the Menninger Clinic*, 26, 129–137.
- Piaget, J. (1981). *Intelligence and affectivity* (T. A. Brown & C. E. Kaegi, Trans.). Annual Reviews.
- Piaget, J. (2005). *Inteligencia y afectividad*. Aique.
- Piaget, J., y García, R. (2008). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI.
- Pierre, J. (1925). *Psicología de los sentimientos*. Fondo de Cultura Económica.
- Planas, N. (1999). La exclusión del alumno en la construcción del conocimiento matemático en el aula: El caso de un alumno inmigrado. *Educación Matemática*, 11(1), 5–22.
- Planas, N. (2002). Hacia una comprensión sociocultural del aprendizaje matemático: Participación y discurso en el aula bilingüe. *Revista EMA*, 7(1), 21–38.
- Prince, R., y Frith, V. (2020). An investigation of the relationship between academic numeracy of university students in South Africa and their mathematical and language ability. *ZDM – Mathematics Education*, 52, 433–445.
- Reder, S. (2020). Numeracy imprisoned: skills and practices of incarcerated adults in the United States. *ZDM — Mathematics Education*, 52(3), 593–605. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01094-0>
- Redmer, A., y Dannath, J. (2020). Changes in employment since the 1990s: Numeracy practices at work in IALS and PIAAC. *ZDM – Mathematics Education*, 52, 447–459.
- Roa-Fuentes, S., y Oktac, A. (2010). Un modelo de construcción de estructuras mentales en torno al triángulo rectángulo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89–112.
- Robertson, S.-A., y Graven, M. (2019). Exploratory mathematics talk in a second language: a sociolinguistic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 215–232. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9840-5>

- Robertson, S.-A., y Graven, M. (2020). Language as an including or excluding factor in mathematics teaching and learning. *Mathematics Education Research Journal*, 32(1), 77–101. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00302-0>
- Romero-Hidalgo, S., Aguilar, M., y Trigueros, M. (2024). La vulnerabilidad en la literatura de educación matemática: Poblaciones y factores. *Educación Matemática*, 36(2), 184–212.
- Rouse, M. (2009). Developing inclusive practice: A role for teachers and teacher education. *Education in the North*, 16, 6–13.
- Sandoval, M., Morgado, B., y Domenech, A. (2020). University students with disabilities in Spain: Faculty beliefs, practices and support in providing reasonable adjustments. *Disability & Society*, 1–20. <https://doi.org/10.1080/09687599.2020.1751078>
- Schmidt, W. H., Houang, R. T., y Cogan, L. S. (2002). A coherent curriculum: The case of mathematics. *American Educator*, 26(2), 1–18.
- Schraw, G., y Dennison, R. S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology*, 19(4), 460–475. <https://doi.org/10.1006/ceps.1994.1033>
- Schreiber-Barsch, S., Curdt, W., y Gundlach, H. (2020). Whose voices matter? Adults with learning difficulties and the emancipatory potential of numeracy practices. *ZDM – Mathematics Education*, 52, 581–592.
- Seatter, C. S., y Ceulemans, K. (2017). Teaching sustainability in higher education: pedagogical styles that make a difference. *The Canadian Journal of Higher Education*, 47(2), 47–70. <http://journals.sfu.ca/cjhe/index.php/cjhe/article/view/18628>
- Shavelson, R., Hubner, J., y Stanton, J. (1976). Self-concept: Validation of construct interpretations. *Review of Educational Research*, 46, 407–441.
- Shields, C. M. (2000). Learning from difference: Considerations for schools as communities. *Curriculum Inquiry*, 30(3), 275–294. <https://doi.org/10.1111/0362-6784.00166>

- Simon, M.A. y Tzur, R. (1999). Explicating the Teachers' Perspective from the Researchers' Perspectives: Generating Accounts of Mathematics Teachers' Practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(3), 252-264.
- Skovsmose, O. (2011). *An invitation to critical mathematics education*. Springer.
- Slee, R. (2018). *The inclusive education workbook: Teaching, learning and research in the irregular school*. Routledge.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.
- Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. En N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (3rd ed., pp. 443–466). Sage.
- Thompson, T. G., Bartell, T. G., Battey, D., y Leyva, L. (2018). Toward equity and social justice in mathematics education. En T. G. Bartell (Ed.), *Toward equity and social justice in mathematics education* (pp. 1–23). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92907-1>
- Tordön, R., Vinnerljung, B., y Axelsson, U. (2014). Improving foster children's school performance: A replication of the Helsingborg study. *Adoption & Fostering*, 38(1), 37–48.
- Townsend, M. (2011). *Are we making the grade? The education of children and young people in out-of-home care* (Tesis doctoral). Southern Cross University. <https://epubs.scu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1202&context=theses>
- Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5–31.
- UNESCO. (1994). *Informe final. Conferencia mundial sobre necesidades educativas especiales: Acceso y calidad*. UNESCO.
- UNESCO. (1994). *Salamanca statement and framework for action on special needs education*. UNESCO.
- UNESCO. (2017). *Textbooks for sustainable development: A guide to embedding*. UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org>

- Valero, P. (2012). Rethinking equity in mathematics education: A sociopolitical perspective. En M. V. Martinez & A. C. Superfine (Eds.), *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 23–46). PME-NA.
- Van Dijk, T. A., Ting-Toomey, S., Smitherman, G., y Troutman, D. (1997). Discourse, ethnicity, culture and racism. En T. van Dijk (Ed.), *Discourse as social interaction* (pp. 31–64). Sage.
- Van Houtte, M., y Demanet, J. (2016). Teachers' beliefs about students, and the intention of students to drop out of secondary education in Flanders. *Teaching and Teacher Education*, 54, 117–127. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.05.008>
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications*. SAGE Publications.
- Zeuner, C., Pabst, A., y Benz-Gydat, M. (2020). Numeracy practices and vulnerability in old age: interdependencies and reciprocal effects. *ZDM — Mathematics Education*, 52, 501–513.

ANEXO 1



Ciudad de México, 03 de marzo de 2023

Atención

Mtra. Silvia Patricia Romero Hidalgo

De acuerdo a su solicitud para realizar la práctica de campo de su trabajo de doctorado titulado "Una propuesta para revertir el rezago educativo y motivar el acercamiento a las matemáticas a jóvenes de poblaciones vulnerables" que realiza en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, hago de su conocimiento que cuenta con la autorización para apoyar la preparación de la parte matemática del examen de COMIPEMS que presentaran dos adolescentes de nuestra comunidad el último fin de semana de junio del año en curso. Podrá usted ingresar al plantel los martes y jueves del 10 de marzo del 2022 al 24 de junio del 2022 de 11:30 a 13:00 horas.

Agradezco el apoyo recibido para nuestro proyecto.

Atentamente

Mtra. Natalia Buendía Jiménez
Directora de Bienestar

Bosque de ciruelos 130-1104
Bosques de las Lomas, 11700,
Miguel Hidalgo, CDMX.
55.36.01.64.45

Fundación Sumando Por Ti A.C



Nicolás Bravo 4 Bis, Santa
María Tepepan, 16020,
Xochimilco, CDMX.
55.76.50.76.93

ANEXO 2

Guion de entrevista semiestructurada a las adolescentes.

Previa a la intervención.

a) *Se inicio con la solicitud de que escribieran su biografía matemática.*

b) *Preguntas:*

- ¿Dónde hiciste la primaria?
- ¿Cómo te fue en la primaria?
- ¿Dónde hiciste la secundaria?
- ¿Cómo te fue en la secundaria?
- ¿Qué te gusta hacer?
- ¿Quiénes son tus mejores amigos?
- ¿En qué lugar te gustaría hacer la preparatoria?
- ¿Te gustaría llegar a la universidad?
- SI tu respuesta es afirmativa, ¿qué te gustaría estudiar?

Guion para entrevista semiestructurada con los directivos y pedagogos de la casa hogar.

- ¿Cuál es el encuadre de la casa hogar?
- ¿Cómo se divide a las residentes?
- ¿Cómo es la relación entre las niñas y adolescentes que viven en la casa hogar?
- ¿Qué tipo de trabajo colaborativo realizan las residentes de la casa hogar?
- Historia personal: ¿Cuándo y por qué ingresaron a la casa hogar?
- ¿Cuál es el contexto personal y actual de cada adolescente?

Guión de entrevista a las adolescentes post-COMIPEMS

Entrevista realizada seis meses después de la intervención

¿Cómo has estado?

¿Cómo te has sentido en la escuela?

¿Cómo te ha ido en la escuela?

¿Cuántas materias llevas? y ¿cuál es la que más te gusta?

¿Qué calificación sacaste en el examen de ingreso al bachillerato?

¿Cómo te fue en el examen de admisión?

¿Cómo te sientes en tu clase de matemáticas?

