



# Instituto Politécnico Nacional



Centro de Investigación en Ciencia  
Aplicada y Tecnología Avanzada  
Unidad Legaria

## **Análisis y enriquecimiento de la imagen conceptual asociada al sistema de coordenadas polares**

Tesis que para obtener el grado de  
Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa  
Presenta

**Arilín Susana Haro Palma**

Director de Tesis

Mario Sánchez Aguilar

Ciudad de México, enero de 2025



## ÍNDICE GENERAL

Introducción . . . . .	1
Capítulo 1: Preguntas de investigación y objetivos . . . . .	2
1.0 Introducción al capítulo. . . . .	2
1.1 Pregunta de investigación . . . . .	2
1.2 Preguntas auxiliares. . . . .	2
Capítulo 2: Antecedentes . . . . .	4
2.0 Introducción al capítulo. . . . .	4
2.1 Metodología seguida para la revisión bibliográfica . . . . .	4
2.2 Hallazgos de la revisión bibliográfica. . . . .	7
2.3 Conclusión del capítulo. . . . .	10
Capítulo 3: Marco conceptual . . . . .	12
3.0 Introducción al capítulo. . . . .	12
3.1 Visualización. . . . .	12
3.2 Propuesta didáctica. . . . .	13
3.3 Imagen conceptual. . . . .	16
3.4 Sistema de coordenadas polares . . . . .	19
3.5 Conclusión del capítulo. . . . .	22
Capítulo 4: Método . . . . .	24
4.0 Introducción al capítulo. . . . .	24
4.1 Etapas . . . . .	24
4.2 Instrumentos . . . . .	27
4.3 Participantes . . . . .	46
4.4 Implementación . . . . .	47
4.5 Análisis de datos empíricos. . . . .	49
4.6 Conclusión del capítulo. . . . .	50
Capítulo 5: Resultados. . . . .	52
5.0 Introducción al capítulo. . . . .	52
5.1 Resultados de la exploración inicial. . . . .	52
5.2 Resultados de la implementación de la propuesta didáctica . . . . .	67

5.2 Conclusión del capítulo. . . . .	82
Capítulo 6: Discusión de resultados. . . . .	84
6.0 Introducción al capítulo. . . . .	84
6.1 Respuesta a la pregunta de investigación y a las preguntas auxiliares . . .	84
6.2 Importancia de la visualización y el uso de la tecnología . . . . .	87
6.3 Limitantes del estudio y futuras investigaciones . . . . .	46
Referencias . . . . .	90

## RESUMEN

El sistema de coordenadas polares es una herramienta fundamental en matemáticas y ciencias aplicadas, relevante en el estudio de temas como números complejos, coordenadas esféricas y aplicaciones en ingeniería. Sin embargo, su aprendizaje presenta desafíos significativos.

En este proyecto se exploró la imagen conceptual asociada a varios conceptos que son parte del sistema de coordenadas polares, identificando que algunos de los obstáculos de aprendizaje descritos en la literatura se reflejan como diferencias entre las imágenes conceptuales evocadas y las definiciones matemáticas de los conceptos. Para abordar estos desafíos, se diseñó una propuesta didáctica basada en herramientas visuales, que al implementarse mostró resultados favorables. Las encuestas y entrevistas realizadas evidenciaron que la visualización fue clave en el enriquecimiento de la imagen conceptual de los estudiantes.

## ABSTRACT

The polar coordinate system is a fundamental tool in mathematics and applied sciences, relevant to the study of topics such as complex numbers, spherical coordinates, and engineering applications. However, its learning process poses significant challenges.

This project explored the conceptual image associated with several concepts that are part of the polar coordinate system, identifying that some of the learning obstacles described in the literature manifest as differences between the conceptual images evoked and the mathematical definitions of the concepts. To address these challenges, a didactic proposal based on visual tools was designed and implemented, yielding favorable results. Surveys and interviews revealed that visualization played a key role in enriching students' conceptual understanding.

## INTRODUCCIÓN

El sistema de coordenadas polares forma parte de los planes de estudio de la mayor parte de los programas de ingenierías o licenciaturas relacionadas con las matemáticas. El sistema de coordenadas polares es fundamental en el estudio de otros temas matemáticos importantes, como los números complejos y las coordenadas esféricas y cilíndricas. Por otro lado, el sistema de coordenadas polares también es una herramienta de investigación utilizada en ciencias mecánicas y de la ingeniería, entre otros campos del conocimiento (Bordón et al., 2019; Kim et al., 2020; Liu et al., 2020). Lo mencionado anteriormente nos da razones suficientes para pensar que es importante prestar atención a la enseñanza y el aprendizaje del sistema de coordenadas polares.

Sin embargo, a pesar de su importancia como herramienta representativa y analítica en las ciencias matemáticas, físicas y de ingeniería, el estudio del sistema de coordenadas polares no está exento de obstáculos de aprendizaje. La comprensión del sistema de coordenadas polares requiere que los estudiantes den un salto conceptual que tiene su punto de partida en el sistema de coordenadas cartesianas. La literatura de investigación en educación matemática ha documentado varios obstáculos de aprendizaje que manifiestan los estudiantes cuando se enfrentan al sistema de coordenadas polares. Asimismo, varios profesionales han desarrollado propuestas didácticas para apoyar a los estudiantes en la comprensión y facilitar la transición hacia este sistema de representación matemática.

En este proyecto se indaga la posibilidad de enriquecer la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares en los estudiantes mediante el diseño e implementación de una propuesta didáctica. A lo largo de este escrito se narra al lector cuál es la problemática por estudiar y el método a seguir. Luego se habla sobre el marco conceptual usado en este proyecto, así como de la revisión bibliográfica y de los hallazgos identificados en la misma y de la relación que tienen con cada parte del marco conceptual. Posteriormente se habla de la metodología utilizada para intentar enriquecer la imagen conceptual de los estudiantes y de los resultados obtenidos.

# **CAPÍTULO 1**

## **PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS**

### **1.0 Introducción al capítulo**

Este proyecto se ha realizado considerando una pregunta de investigación principal y junto con ella varias preguntas auxiliares. En este capítulo se presenta cada pregunta junto con su objetivo.

#### **1.1 Pregunta de investigación**

**Pregunta de investigación:** ¿Es posible enriquecer la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares que se forma en los estudiantes? De ser así, ¿cómo?

El objetivo de este proyecto no solamente es responder “sí” o “no” a si es posible enriquecer la imagen conceptual. Sino que para responder a la pregunta “¿cómo?”, se espera crear una intervención didáctica basada en material visual que, de ser posible, logre enriquecer la imagen conceptual de los estudiantes acerca del sistema de coordenadas polares.

#### **1.2 Preguntas auxiliares**

Para poder dar respuesta a la pregunta de investigación, fue necesario plantearse algunas preguntas auxiliares que permitieran dar pauta al proceso que se siguió en esta investigación, cabe mencionar que cada una de estas preguntas auxiliares está ligada a un objetivo particular.

1. ¿Cuáles son los obstáculos de aprendizaje asociados con el sistema de coordenadas polares que se han identificado en la literatura especializada y de qué tipo son?

*Objetivo particular:* Identificar los obstáculos o dificultades que enfrentan los estudiantes al abordar este tema, basándome no sólo en mi experiencia docente sino también en los hallazgos de la revisión bibliográfica sobre obstáculos y dificultades de aprendizaje que se han hecho y reportado a través de los años y diferentes geografías.

2. ¿Cuáles son las propuestas didácticas relacionadas con el sistema de coordenadas polares que se han planteado en la literatura especializada?

*Objetivo particular:* conocer a través de la literatura especializada las ideas o propuestas didácticas que ya se han llevado a cabo y cómo han funcionado.

3. ¿Cuál es la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares que se forma en los estudiantes luego de abordar este tema en clase?

*Objetivo particular:* explorar la imagen conceptual formada en los alumnos universitarios para los cuales este tema forma parte de su currícula obligatoria en primer semestre.

4. ¿Es posible que los estudiantes enriquezcan la imagen conceptual formada con ayuda de una propuesta didáctica basada en herramientas que permitan la visualización?

*Objetivo particular:* poner a prueba la propuesta didáctica que se enfoca en superar o lidiar con los obstáculos encontrados y que permita hacer uso de la visualización del sistema de coordenadas polares y conceptos ligados al mismo.

## **CAPÍTULO 2**

### **ANTECEDENTES**

#### **2.0 Introducción al capítulo**

Para abordar los antecedentes relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del sistema de coordenadas polares se realizó una revisión bibliográfica sobre el tema. La revisión bibliográfica llevada a cabo para la realización de este proyecto abarca los últimos 41 años y cubre revistas de investigación en matemática educativa, así como revistas de profesores practicantes de la enseñanza de las matemáticas. La revisión se enfoca en identificar obstáculos de aprendizaje y propuestas didácticas relacionadas con la noción de coordenadas polares.

#### **2.1 Metodología seguida para la revisión bibliográfica**

##### **Primera fase: Búsqueda y localización de documentos relevantes en revistas académicas.**

La fase inicial de la revisión bibliográfica se enfocó en revistas de investigación y revistas de prácticas docentes en educación matemática. El rango de tiempo que abarcó la revisión fue desde 1981 hasta 2023 con el objetivo de capturar la evolución del conocimiento didáctico sobre las coordenadas polares. Se seleccionaron revistas clasificadas como de alto rango en el campo de la educación matemática, además se incluyeron revistas de prácticas docentes en el área de matemáticas.

---

**Revistas consideradas a partir de los rankings de Toerner y Arzarello (2012), y Williams y Leatham (2017) (en orden alfabético)**

---

Educational Studies in Mathematics  
For the Learning of Mathematics

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology

International Journal of Science and Mathematics Education

Journal for Research in Mathematics Education

Journal of Mathematics Teacher Education

Mathematical Thinking and Learning

Mathematics Education Research Journal

Recherches en Didactique des Mathématiques

Research in Mathematics Education

School Science and Mathematics

The Journal of Mathematical Behavior

ZDM Mathematics Education

---

**Revistas consideradas del ranking de Andrade-Molina et al. (2020) (en orden**

**alfabético)**

---

BOLEMA. Boletim de Educação Matemática

Educación Matemática

Educação Matemática Pesquisa

Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas

Quadrante. Revista de Investigação em Educação Matemática

RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Etnomatemática

UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática

UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas

Zetetiké. Revista de Educação Matemática

---

**Revistas de prácticas docentes incluidas en la revisión (en orden**

**alfabético**

---

Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12

---

**Tabla 1.** Lista de revistas consideradas para el desarrollo de la revisión de la literatura reportada en este artículo.

Para la búsqueda se utilizaron seis palabras clave para identificar los documentos relevantes en inglés, español, portugués y francés. Los documentos localizados fueron seleccionados cuidadosamente según su relación con el sistema de coordenadas polares. Solamente se tomaron en cuenta artículos relacionados con el aprendizaje y la enseñanza del sistema de coordenadas polares. Es decir, se excluyeron aquellos artículos en los que se hablara de coordenadas polares como herramienta para abordar otro tema y también se excluyeron artículos en los que se supusiera que los estudiantes ya tenían un entendimiento basto del tema.

### **Segunda fase: Análisis de los documentos localizados**

En la segunda fase, se analizaron los documentos localizados en busca de información relevante sobre obstáculos de aprendizaje y propuestas de enseñanza relacionadas con coordenadas polares. Se clasificaron los obstáculos de aprendizaje y las propuestas de enseñanza según su tipo, basándose en los tipos de obstáculos y los propósitos de las propuestas de enseñanza.

Esta metodología permitió localizar y analizar un total de 27 documentos relevantes para la revisión de literatura sobre el tema de las coordenadas polares. A continuación, se muestra una tabla con el conteo de artículos relacionados con la enseñanza o el aprendizaje del sistema de coordenadas polares en cada revista.

---

Revista	Cantidad de artículos seleccionados
Educational Studies in Mathematics	1

---

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology	3
--	---

Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12	2
---	---

The Journal of Mathematical Behavior	2
--------------------------------------	---

The Mathematics Teacher	15
-------------------------	----

**Tabla 2.** Cantidad de artículos relacionados con la enseñanza o el aprendizaje del sistema de coordenadas polares en cada revista.

## 2.2 Hallazgos de la revisión bibliográfica

Luego de realizar la revisión bibliográfica reportada en Haro y Aguilar (2024), se detectaron algunos obstáculos de aprendizaje y también varias propuestas didácticas asociadas con el sistema de coordenadas polares.

### 2.2.1 Obstáculos de aprendizaje

De acuerdo con Jankvist & Niss (2015, p. 260), un obstáculo de aprendizaje puede entenderse como “aquellos obstáculos, barreras e impedimentos aparentemente insuperables que algunos estudiantes encuentran en su intento de aprender la materia”. Durante la revisión se encontraron siete obstáculos de aprendizaje documentados en la literatura los cuales se enlistan a continuación:

- Darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones. (Camp, 1995)

- Identificar y trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ . (Borji et al., 2020; Borji y Voskoglou, 2017; Habre, 2017)
- Reconocer que el polo, centro del plano polar, puede tener múltiples representaciones. (Moore et al. 2014)
- Hallar los puntos de intersección de las gráficas de dos funciones en el plano polar. (Esty, 1991; Germain-McCarthy, 1994)
- Identificar cuando una relación entre  $r$  y  $\theta$  es una función en coordenadas polares. (Montiel et al. 2008; Montiel et al., 2009)
- Graficar funciones en coordenadas polares. (Phan-Yamada y Yamada III, 2012)
- Convertir coordenadas cartesianas en coordenadas polares. (Borji et al., 2020; Borji y Voskoglou, 2017)

Se observó que los primeros cuatro obstáculos son parte de un mismo conflicto, el cual es, que a diferencia del plano cartesiano con coordenadas  $(x, y)$ , el plano polar tiene una infinidad de coordenadas polares  $(r, \theta)$  que representan un mismo punto. Al parecer, un estudiante que no haya aceptado y asimilado esta idea está condenado a toparse con los primeros cuatro obstáculos uno por uno. En cambio, los últimos tres obstáculos están relacionados con las funciones en el sistema de coordenadas polares y con la conversión entre diferentes sistemas de coordenadas. Estos obstáculos parecen ser “evitables” o “superables”, siempre y cuando el profesor elija las herramientas, actividades o métodos más adecuados para su grupo.

#### 2.2.3 *Propuestas didácticas*

En la revisión bibliográfica también se buscaron propuestas didácticas que sirvieran como apoyo en el proceso de enseñanza del sistema de coordenadas polares. Las propuestas didácticas fueron identificadas de acuerdo con la clasificación en la sección 3.2 de este escrito. Los resultados de dicha búsqueda fueron los siguientes:

Se encontraron dos propuestas didácticas (Ahl, 1981; Allinger, 1983) cuyo objetivo es introducir la noción de coordenadas polares. Cabe mencionar que las propuestas se basan en juegos, y que, en los tres casos, se puede visualizar el polo (origen) y la distancia que

separa a los objetos del polo. En ellos la coordenada  $\theta$ , encargada de dar la dirección se representa con un ángulo y en una de las propuestas, también se da la dirección usando la posición de las manecillas del reloj.

También se encontraron varias propuestas didácticas cuyo propósito es ayudar a los estudiantes a superar algún obstáculo de aprendizaje. Sin embargo, la mayor parte de estas propuestas están enfocadas en la graficación de funciones en el plano polar (algunos ejemplos de estas propuestas se puedes encontrar en Edwards y Reinhardt (2008), o bien en Phan-Yamada y Yamada III (2012)), dos propuestas tratan de lidiar con el obstáculo de encontrar puntos de intersección entre dos gráficas de funciones polares (Esty, 1991; Germain-McCarthy, 1994) y otras dos propuestas abordan el obstáculo de las múltiples representaciones de un punto en el plano polar (Camp, 1995; Kroon, 2014).

Muchas de las propuestas didácticas encontradas tienen como propósito ayudar a los estudiantes con la graficación de funciones en coordenadas polares con uso de la tecnología (graficadores digitales y software dinámico) que permiten la visualización. Dado que la tecnología ha avanzado a lo largo del tiempo, quizá era de esperar que las herramientas tecnológicas usadas en las propuestas didácticas también fueran evolucionando. En seguida se mencionan algunas propuestas que dejan ver este fenómeno.

Walton y Walton (1987) sugieren emplear programación computacional para que los estudiantes exploren los efectos gráficos de la variación de parámetros en diferentes ecuaciones polares, proporcionando ejemplos en lenguaje BASIC permitiendo a los estudiantes experimentar con la variación de valores de  $\theta$  para visualizar curvas polares, destacando su impacto gráfico. Por su parte, Lowther (1999) da una propuesta similar, pero con el uso de calculadoras gráficas.

Por otro lado, Edwards y Reinhardt (2008) recomiendan aprovechar las calculadoras gráficas para fomentar discusiones sobre la continuidad y otras propiedades de las funciones polares. A su vez, en Zengin y Tatar (2015) usan GeoGebra para relacionar puntos del plano cartesiano con Walker (2007) su ubicación en el plano polar. Otra actividad que se vale de software interactivo es que utiliza The Geometer's Sketchpad para visualizar la gráfica de funciones en coordenadas polares y compararla con la forma de algunas flores.

Actualmente, tanto Geogebra como Desmos permiten graficar, con gran facilidad y precisión, puntos y funciones en coordenadas polares. Esto último se evidencia al usar el material creado para la propuesta didáctica que se construyó en este proyecto.

## 2.3. Conclusión del capítulo

Llama la atención el hecho de que, aunque se identificaron siete obstáculos de aprendizaje, solamente se encontraron propuestas para lidiar con tres de ellos (graficación de funciones en el plano polar, encontrar puntos de intersección entre dos gráficas de funciones polares y múltiples representaciones de un punto en el plano polar).

Durante este capítulo se hizo evidente que el tema de coordenadas polares ha dado de qué hablar a los profesores. Pues se encontraron 17 artículos en revistas de profesores practicantes que reportan tanto obstáculos como propuestas didácticas. Por otro lado, se encontraron otros 10 artículos en revistas de investigación, que estudian ciertas partes tanto de la enseñanza como del aprendizaje del sistema de coordenadas polares (una lista de artículos encontrados en la literatura se encuentra en los anexos, sección Apéndice 2. Artículos en los que se basa la revisión bibliográfica, de este documento). Cabe mencionar que en las revisas de investigación se muestran análisis que hacen uso de diferentes teorías de aprendizaje, pero ninguna de ellas es imagen conceptual. Esto no quiere decir que la imagen conceptual no sea importante o relevante, pues existen varios artículos de imagen conceptual abordando otros conceptos. Lo que se quiere expresar es que aún hay mucho por investigar respecto al sistema de coordenadas polares. Lo anterior no solamente aplica para estudios que analicen la imagen conceptual. De hecho, un área de oportunidad se podría avistar al implementar, analizar y reportar resultados de las propuestas didácticas existentes en la literatura, o incluso, crear y probar propuestas didácticas que sirvan para ayudar a los estudiantes con los obstáculos de aprendizaje que aún no se han atendido.

El uso de la visualización como herramienta para enseñar o reforzar algunos conceptos es un factor que apareció repetidas veces durante la lectura de los artículos encontrados. Mientras varios de los autores utilizan herramientas tecnológicas como

calculadoras o software dinámico, otros eligen analogías como describir la ubicación de personas en una habitación o la ubicación de un barco en el mar. Esto podría sugerir que hacer uso de la visualización sería un acierto en el diseño de una propuesta didáctica.

En este proyecto se pretende crear una propuesta didáctica que, por medio de diferentes herramientas visuales, enriquezca la imagen conceptual de los alumnos que hayan tropezado con los obstáculos relacionados con la múltiple representación de un punto en el plano polar, identificar y trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ , la representación del polo y la graficación de funciones en el sistema de coordenadas polares.

## CAPÍTULO 3

### MARCO CONCEPTUAL

#### 3.0. Introducción al capítulo

En esta sección se introducen las nociones de *visualización*, *obstáculos de aprendizaje*, *propuesta didáctica* e *imagen conceptual*. Las nociones de obstáculos de aprendizaje y propuesta didáctica son utilizadas para estructurar la revisión de literatura sobre obstáculos de aprendizaje y propuestas de enseñanza relacionadas con el tema de coordenadas polares. Mientras que la noción de imagen conceptual es empleada para analizar el entendimiento de los estudiantes acerca de coordenadas polares, tratando de explorar su imagen conceptual antes y después de usar la visualización para enriquecer la imagen conceptual asociada a este tema.

#### 3.1. Visualización

En este proyecto, tal y como en Presmeg (2020), se hace uso de la palabra *visualización* para referirse a la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre dibujos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y entendimientos avanzados.

Se puede hacer uso, y sacar ventaja, de la visualización de varias formas. En Arcavi (2003) se muestran varios ejemplos de los diferentes roles que puede jugar una representación visual en un contexto matemático. El uso de la visualización ya ha sido estudiado y ha obtenido resultados positivos. Por ejemplo, en Van Garderen (2006) se menciona que el uso de imágenes visuales puede llevar a un mejor despeño en la resolución de problemas matemáticos.

En este proyecto se persigue, entre otras cosas, el uso de la visualización para ver lo que no es visible con símbolos y palabras. Por ejemplo, se hace uso de dibujos, analogías, gráficas estáticas y gráficas en software dinámico.

## 3.2 Propuesta didáctica

En este trabajo se utiliza la noción de *propuesta didáctica* para referirse a toda intervención en el aula o actividad didáctica que tenga como finalidad producir conocimientos matemáticos en los estudiantes o fortalecer su comprensión de alguna noción matemática.

Las propuestas didácticas en educación matemática suelen tener uno o más de los siguientes propósitos:

1. Introducir una nueva noción matemática.
2. Ayudar a superar obstáculos de aprendizaje y profundizar en diferentes aspectos de alguna noción matemática ya introducida a los alumnos.
3. Establecer conexiones entre diferentes nociones matemáticas.

Dado que este proyecto se enfoca en la enseñanza y aprendizaje de las coordenadas polares, se tuvieron en cuenta únicamente actividades de las categorías 1 y 2. Se hace esta distinción pensando que para las actividades de la categoría 3 ya se requiere el conocimiento y dominio del tema en cuestión.

Algunas características que distinguen a las propuestas que atienden a los propósitos 1 y 2 se enlistan a continuación:

Propósito 1: Introducir una nueva noción matemática:

Las propuestas didácticas orientadas a este propósito pueden centrarse en presentar un concepto matemático de manera clara y accesible para los estudiantes.

- Se suelen emplear representaciones visuales, analogías o situaciones problemáticas contextualizadas, que conecten el nuevo concepto con conocimientos previos o experiencias cotidianas de los estudiantes, facilitando así su comprensión inicial.

- La secuenciación de actividades es comúnmente comenzar con ejemplos simples que permitan explorar las características básicas de la noción y evolucionar gradualmente hacia situaciones más complejas.
- Los materiales interactivos, como simulaciones o manipulaciones en software, pueden ser particularmente útiles para introducir el concepto de manera dinámica y permitir que los estudiantes experimenten con él desde el inicio.
- Los videos explicativos también pueden ser de gran ayuda en esta fase, ofreciendo un formato flexible y pausado para explicar la noción matemática paso a paso.

Propósito 2: Ayudar a superar obstáculos de aprendizaje y profundizar en diferentes aspectos de una noción matemática ya introducida:

Las propuestas diseñadas para este propósito se centran en identificar y abordar dificultades comunes que los estudiantes enfrentan con respecto al concepto ya presentado. Esto puede incluir malentendidos, errores conceptuales o limitaciones en su capacidad de aplicar la noción en distintos contextos.

- Para superar estos obstáculos, se proponen actividades que refuerzen la comprensión conceptual mediante la exploración de ejemplos más avanzados, la introducción de contraejemplos, y la resolución de problemas que inviten a los estudiantes a pensar de manera más profunda sobre el concepto.
- Retroalimentación formativa y la autoevaluación son elementos importantes en este proceso, pues permiten a los estudiantes reflexionar sobre sus errores y ajustar su comprensión.
- Los recursos visuales y dinámicos, como las herramientas de software matemático, siguen desempeñando un rol crucial al ofrecer nuevas maneras de interactuar con el concepto y descubrir sus matices.
- La diferenciación en el nivel de dificultad de las actividades también es importante, de modo que los estudiantes que han dominado ciertos aspectos

puedan profundizar en otros más complejos, mientras que aquellos que aún tienen dificultades puedan trabajar en afianzar su comprensión básica.

Durante la revisión bibliográfica se identificaron las propuestas didácticas sobre coordenadas polares que se reportan en la literatura especializada, prestando especial atención a sus objetivos y posibles resultados. Cabe mencionar que no todas las propuestas didácticas localizadas cumplen con todos los puntos mencionados anteriormente. Esto no necesariamente significa que no haya habido una planeación adecuada, pues existe la posibilidad de que simple y sencillamente no se haya documentado el proceso de planeación de la propuesta y que lo único que se muestre sea la motivación y la propuesta misma. En la sección “2.2.3 Propuestas didácticas” de este escrito se habló sobre las propuestas didácticas encontradas en la literatura. Sin embargo, en la sección “Teaching proposals identified” de Haro y Aguilar, 2024, se puede encontrar un análisis más detallado y extenso de las propuestas didácticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del sistema de coordenadas polares.

Existen varios tipos de propuestas didácticas, que se pueden clasificar según distintos enfoques educativos y los objetivos que buscan alcanzar. Un tipo común es la propuesta didáctica tradicional, que sigue un enfoque centrado en el profesor y se enfoca en la transmisión de contenidos desde el docente hacia los estudiantes. Este tipo de propuesta didáctica suele enfatizar lecciones estructuradas, el aprendizaje memorístico y las actividades dirigidas por el docente. Otro tipo de propuesta didáctica es la constructivista, que se centra en el estudiante y fomenta el aprendizaje activo, la reflexión y el pensamiento crítico.

La propuesta didáctica creada a lo largo de este proyecto es constructiva. Está planeada para implementarse por etapas; teniendo momentos en los que se fomenta la aclaración de dudas con videos explicativos, la experimentación por medio de software dinámico (como GeoGebra y Desmos) y la reflexión mediante cuestionarios y la oportunidad de cambiar de respuesta u opinión respecto a las respuestas previamente dadas.

### 3.3 Imagen conceptual

Tall y Vinner (1981) definen la imagen conceptual (también traducida como “imagen del concepto”) como la estructura cognitiva total asociada a un cierto concepto. Esto incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a dicho concepto. La imagen conceptual se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y puede cambiar a medida que el individuo encuentra nuevos estímulos.

Otro concepto relacionado con la imagen conceptual es la definición conceptual. Esto último se refiere a las palabras usadas por un individuo para definir el concepto en cuestión. La definición conceptual forma parte de la imagen conceptual, e igualmente puede no coincidir con la definición matemática del concepto.

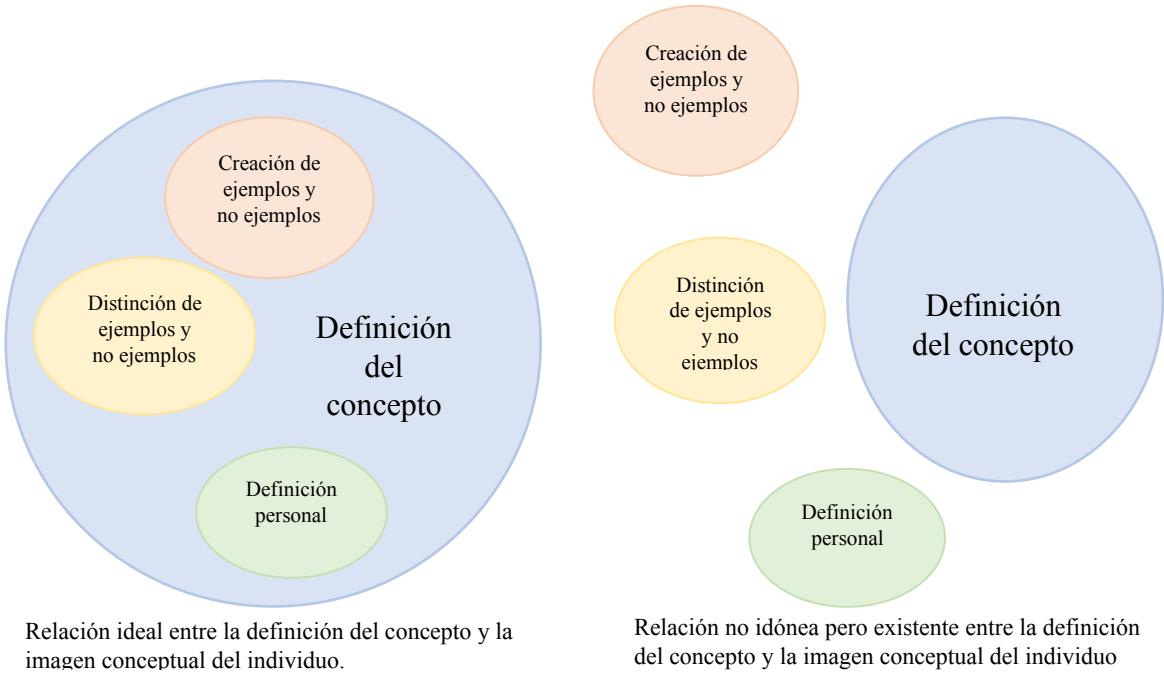
Al explorar la imagen conceptual de un individuo, se puede tratar de convocar a su imagen conceptual de muchas maneras por ejemplo con ejercicios, preguntas, imágenes o definiciones. Se llama “imagen conceptual evocada” a la parte de la imagen conceptual que se activa en un momento determinado, con un estímulo dado. Es importante notar que, en diferentes momentos, es posible evocar imágenes conceptuales diferentes, e incluso contradictorias, de un mismo concepto.

Aunque una imagen conceptual puede ser amplia y de naturaleza no tangible, en la literatura especializada se ha reportado el uso de cuestionarios con preguntas de opción múltiple o con preguntas abiertas, también es común el uso de entrevistas para profundizar en las exploraciones de la imagen conceptual (ver por ejemplo Tirosh y Tsamir (2022) y Ulusoy (2021)). Aunque existen diferentes formas de explorar la imagen conceptual, hay tres tipos de preguntas que son comúnmente usadas en este tipo de exploraciones.

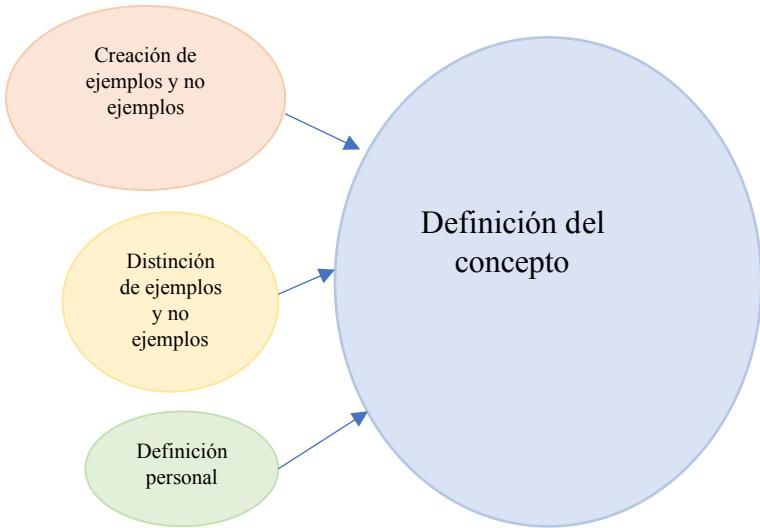
- Preguntas de definición en las que los alumnos proporcionan una definición formal o personal del concepto.
- Preguntas de identificación que requieren identificar ejemplos y contraejemplos del concepto.
- Preguntas de generación de ejemplos en las que los alumnos generan ejemplos y contraejemplos del concepto.

Aunque en la literatura se ha usado la expresión “enriquecer la imagen conceptual” (Giraldo et al., 2003; Zhang et al., 2014) aún no se ha dado una definición explícita de a qué se refieren con esto. En el siguiente párrafo se define el significado de “enriquecer imagen conceptual” que se construyó durante este proyecto.

Al hablar de imagen conceptual, uno se podría preguntar: ¿basta con sólo explorar la imagen conceptual formada en un individuo? En la opinión de la autora, si las imágenes conceptuales evocadas parecen coincidir entre ellas y con el tema o concepto en cuestión, como docente es posible pensar que el trabajo está hecho. Sin embargo, si al explorar la imagen conceptual, se obtienen imágenes conceptuales evocadas que son contradictorias o ajena a la definición matemática del concepto; uno como docente, podría sentir el deber de intentar complementar, o incluso corregir, las ideas o procedimientos que provocan en los estudiantes discordancias entre las imágenes conceptuales evocadas y la definición del concepto. Es a esto último, a lo que en este escrito se llama *enriquecer la imagen conceptual*, es decir, a reducir la brecha que separa a las imágenes conceptuales de la definición del concepto. En los siguientes 3 diagramas se muestra una representación de lo que sería una imagen conceptual que coincide con la definición matemática del concepto, posteriormente se muestra una posible forma de imagen conceptual que no esté alineada con la definición del concepto y, por último, se muestra una representación de lo que para la autora sería enriquecer la imagen conceptual.



*Figura 1: Ejemplificaciones de posibles relaciones entre la imagen conceptual y la definición del concepto.*



Enriquecer la imagen conceptual: Hacer coincidir, o achicar la distancia entre, la definición del concepto y las imágenes conceptuales evocadas.

*Figura 2: Representación gráfica de un posible enriquecimiento de la imagen conceptual.*

Dentro de la literatura relacionada con la imagen conceptual Tirosh y Tsamir (2022) definen los términos *Missing* y *Mis-in* para referirse a la selección errónea de ejemplos o contraejemplos. *Missing* se refiere a cuando un ejemplo correcto es categorizado erróneamente como contraejemplo, en cambio *Mis-in* se refiere a cuando se categoriza como ejemplo a un contraejemplo. Identificar cualquiera de estos tipos de errores sería una oportunidad perfecta para intentar enriquecer la imagen conceptual de un individuo.

### 3.4 Sistema de coordenadas polares

El sistema de coordenadas polares es un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia,  $r$ , y un ángulo,  $\theta$ .

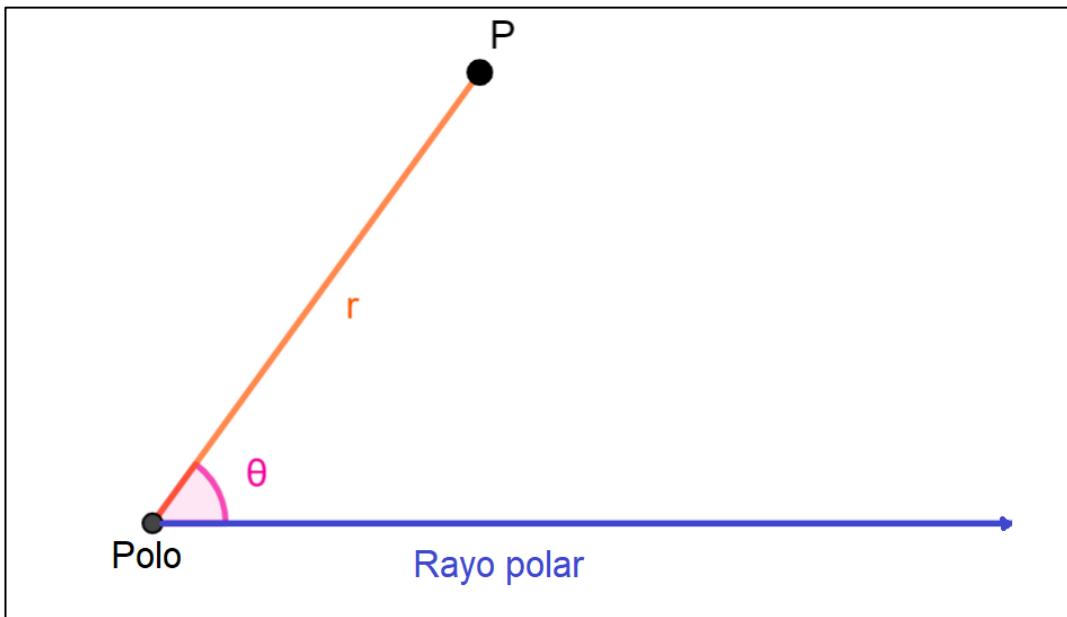


Figura 3: Representación de los componentes de coordenadas polares en el plano.

Para dar una definición del sistema de coordenadas polares, se podría decir que:

El sistema de coordenadas polares se define con base en:

- Un punto central, al que se llama polo.
- Un rayo que comienza en el polo. A dicho rayo se le llama rayo polar y se identifica con el semieje positivo de las  $x$  en el plano cartesiano.

Dados el polo y el rayo polar, se define la ubicación de un punto,  $P$ , en el plano polar de acuerdo con sus coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Donde  $r$  es la distancia del punto  $P$  al origen y  $\theta$  es el ángulo formado entre el eje polar y el segmento de recta que va del polo al punto  $P$ .

A la coordenada  $r$  se le conoce como coordenada radial, mientras que, a  $\theta$  se le llama coordenada angular.

Que el sistema de coordenadas polares forme parte de los temas a cubrir en un curso de ingeniería o de licenciatura quiere decir que se espera que el estudiante domine no sólo un concepto, sino que domine varios conceptos y que además logre entrelazarlos e ir y venir entre ellos. Un ejemplo de currícula de la materia que incluye el sistema de coordenadas

polares se puede encontrar en los programas de Licenciatura en matemáticas, Licenciatura en física y Licenciatura en Actuaría en la facultad de ciencias de la UNAM.

Por ejemplo, se espera que el alumno:

1. Transite correctamente entre coordenadas polares y su respectiva ubicación en el plano polar.
  - Dadas las coordenadas polares de un punto, el alumno logre ubicar dicho punto.
  - Dada la ubicación de un punto en el plano polar, el alumno logre dar coordenadas  $(r, \theta)$  que correspondan a dicho punto.
  - Dada la descripción de un lugar geométrico del plano polar, el alumno logre ubicar los puntos que le corresponden.
2. Convierta entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares.
  - Dada la ubicación de un punto en el plano cartesiano, el alumno logre dar coordenadas que correspondan a dicho punto.
  - Dada la ubicación de un punto en el plano polar, el alumno logre dar las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  que correspondan a dicho punto.
3. Reconozca y grafique funciones en el plano polar.
  - Dada una relación, escrita o dibujada en el plano polar, el alumno sepa reconocer cuándo dicha relación es una función.
  - Dada una función en coordenadas polares, el alumno sea capaz de dibujar la gráfica de la función en el plano polar.

Cada uno de los puntos 1, 2 y 3 mencionados anteriormente hacen alusión a una operación o procedimiento asociado al sistema de coordenadas polares. Sin embargo, para que un individuo logre realizar estas operaciones correctamente primero es necesario que conozca algunos conceptos. En la imagen a continuación se muestra un diagrama donde las líneas punteadas delimitan los conceptos que son necesarios para poder llevar a cabo los procedimientos 1, 2 y 3 respectivamente. En el diagrama se distingue entre dos tipos de cajas de texto. Las de esquinas redondeadas, que representan los conceptos que son prerequisitos para abordar el sistema de coordenadas polares. En cambio, las cajas de texto rectangulares

encierran los conceptos que los alumnos verán por primera vez al abordar el sistema de coordenadas polares. A su vez, las flechas señalan las interacciones entre los diferentes conceptos que son requeridas para que el estudiante realice los procesos relacionados con el sistema de coordenadas polares.

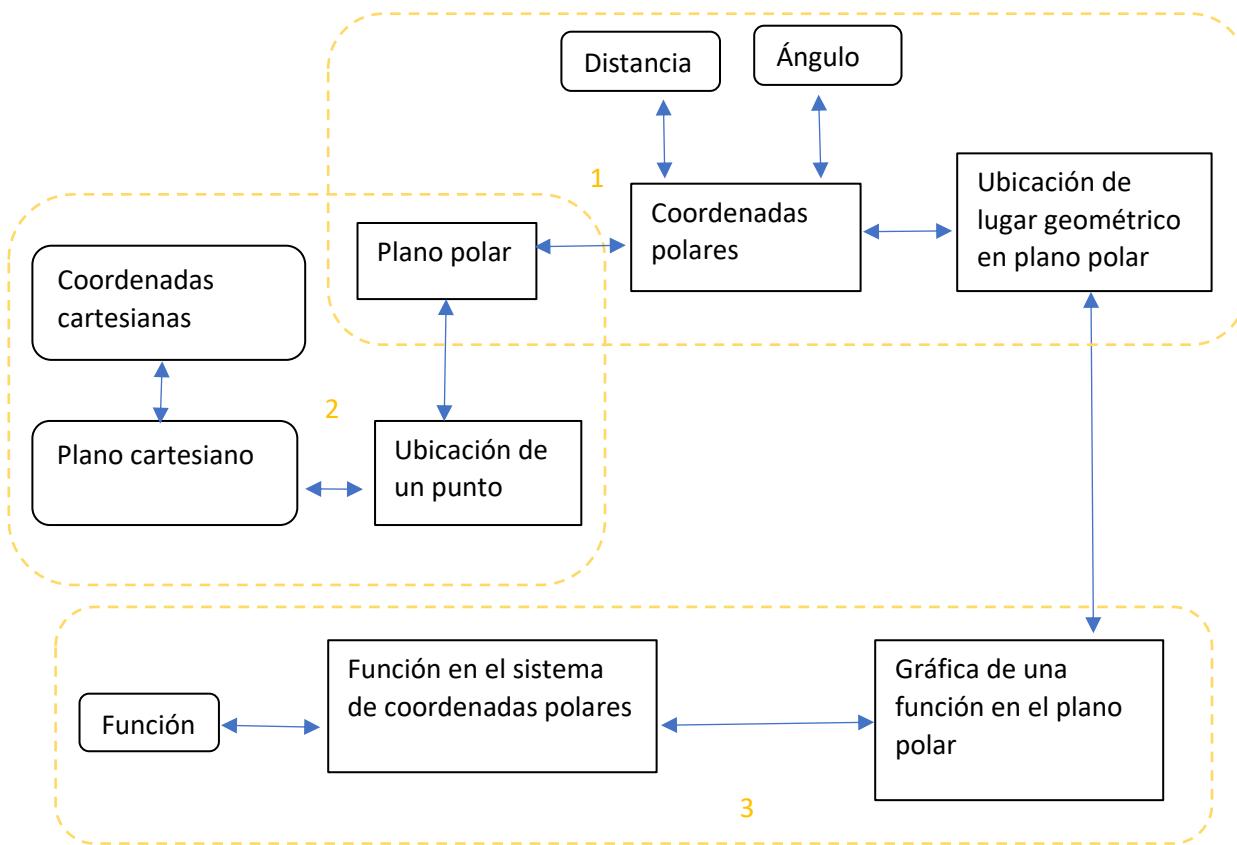


Figura 4: Conceptos incluidos dentro del sistema de coordenadas polares.

### 3.5 Conclusión del capítulo

Las tres nociones abordadas en este capítulo, obstáculos de aprendizaje, propuesta didáctica e imagen conceptual parecen ser ideas diferentes y no ligadas entre sí. Sin embargo, están estrechamente entrelazadas.

Por medio de una propuesta didáctica, el enriquecimiento de la imagen conceptual puede lograrse mediante estrategias que favorezcan la visualización, la representación

múltiple y el análisis de ejemplos y contraejemplos. La visualización mediante el uso de herramientas como GeoGebra, Desmos, videos y analogías puede fomentar una mejor comprensión de los conceptos abstractos al hacerlos más accesibles.

La inclusión de actividades que promuevan el uso de software interactivo para la construcción y manipulación de parámetros que influyen en la representación de los conceptos permite que los estudiantes experimenten de manera directa y visual las propiedades matemáticas asociadas al concepto y a sus parámetros. Por otro lado, presentar ejemplos relacionados con situaciones de la vida cotidiana o analogías concretas facilita la conexión de los conceptos abstractos con experiencias más comprensibles para los estudiantes.

Por ejemplo, al explorar la imagen conceptual formada, es posible conocer los obstáculos de aprendizaje con los que se enfrentan los estudiantes. Una vez identificado un obstáculo de aprendizaje se puede diseñar una propuesta didáctica que permita lidiar con dicho obstáculo. Luego de diseñar la propuesta didáctica, se podría cerrar un ciclo al ponerla en práctica y volver a explorar la imagen conceptual en los estudiantes para saber si la propuesta ayudó, o no, a superar el obstáculo identificado. En este trabajo se busca, entre otras cosas, conocer el impacto que tienen las propuestas didácticas que se valen de herramientas visuales al intentar enriquecer la imagen conceptual del estudiante.

# CAPÍTULO 4

## MÉTODO

### 4.0 Introducción al capítulo

A lo largo de este capítulo se explicará cómo se llevó a cabo la investigación para dar respuesta a la pregunta de investigación que rige este proyecto. Se hablará sobre las etapas, los instrumentos, y los participantes involucrados en cada momento de la investigación.

### 4.1 Etapas

#### 4.1.1 Exploración inicial de la imagen conceptual formada en los estudiantes

Durante esta etapa se aplicaron cuestionarios de exploración inicial de la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares. Los detalles de dichos cuestionarios se pueden encontrar en la sección 4.2.

Entre los propósitos con los que se realizó esta etapa se encuentran:

1. Identificar los conceptos relacionados con el sistema de coordenadas polares que estuvieran reflejando en los estudiantes una imagen conceptual alejada de la definición matemática del concepto.
2. Identificar coincidencias y diferencias obtenidas al evocar de diferente manera la imagen conceptual de un mismo concepto.
3. Identificar conceptos que requerieran una propuesta didáctica que ayude a enriquecer la imagen conceptual formada.
4. Saber si los obstáculos de aprendizaje relacionados con el sistema de coordenadas polares encontrados durante la revisión bibliográfica se manifestaban, o no, en las imágenes conceptuales evocadas por los estudiantes. Es decir, contrastar la investigación teórica con la investigación empírica.

#### *4.1.2 Diseño y creación de la propuesta didáctica*

Para el diseño de la intervención didáctica se tomaron en cuenta los obstáculos identificados en la revisión bibliográfica y en la primera exploración de la imagen conceptual.

Durante su experiencia docente, la autora ha impartido el curso de Geometría Analítica 1 en más de 8 ocasiones, lo que le ha permitido abordar este tema en clase al menos 8 veces. A lo largo de este tiempo, ha reflexionado no sólo sobre los obstáculos que enfrentan sus estudiantes, sino que también ha tenido la oportunidad de discutir estos desafíos con otros profesores. Asimismo, ha observado cómo la visualización de ciertos conceptos influye positivamente en la comprensión de los estudiantes. Por esta razón, al desarrollar la propuesta didáctica, decidió utilizar herramientas visuales que estén disponibles en cualquier momento.

El hecho de que los obstáculos que la autora ha identificado en su práctica docente también hayan sido señalados en la literatura resultó ser un descubrimiento afortunado. No obstante, el desarrollo de la propuesta didáctica en este proyecto no se diseñó para abordar todos los obstáculos mencionados en la literatura, sino que se planificó específicamente para ayudar a los estudiantes a superar los siguientes obstáculos:

- La múltiple representación de un punto en el plano polar
- Identificar y ubicar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$
- La representación del polo
- La graficación de funciones en el sistema de coordenadas polares

Dado que en este proyecto se buscó ayudarse de la visualización para enriquecer la imagen conceptual, las actividades creadas durante el diseño de la intervención didáctica usan herramientas visuales como dibujos, gráficas, videos y actividades basadas en software dinámico. Más detalles sobre el material creado para la intervención didáctica se pueden encontrar en la sección 4.2.

La propuesta didáctica creada no sólo consta de videos y actividades en software dinámico, sino que también incluye instrumentos (cuestionarios y encuestas) y momentos

propicios para que los estudiantes tengan la oportunidad de reflexionar, autoevaluarse y corregir creencias alejadas de la definición del concepto. En general, se podría decir que esta propuesta didáctica, además de ser constructivista, cumple con los estándares de una propuesta didáctica que busca el “Propósito 2: Ayudar a superar obstáculos de aprendizaje y profundizar en diferentes aspectos de una noción matemática ya introducida” mencionado en la sección 3.2.

A lo largo del diseño de esta propuesta no sólo se buscaba obtener respuesta a las preguntas de investigación, sino que además, se buscaba que estas actividades fueran realmente incorporables a la práctica docente y que fueran amigables y de provecho para los estudiantes.

Vale la pena mencionar que las versiones de las herramientas que se muestran en este documento no son la primera versión. Tanto las actividades de GeoGebra como los cuestionarios y las encuestas se pusieron a prueba con varios grupos y se recibió retroalimentación tanto de estudiantes como de docentes.

#### *4.1.3 Exploración de la imagen conceptual previo a la implementación de la propuesta didáctica*

A diferencia de la exploración de la etapa 4.1.1, esta exploración se realizó con otro grupo de estudiantes. Este nuevo grupo de estudiantes también había abordado el sistema de coordenadas polares en clase con anterioridad a la exploración.

El objetivo de hacer una nueva exploración de la imagen conceptual con este grupo luego de haber abordado el sistema de coordenadas polares en clase era tener un punto de partida con el que se pudieran comparar las imágenes conceptuales antes y después de la implementación de la propuesta didáctica.

#### *4.1.4 Implementación de la propuesta didáctica*

En esta etapa se aplicaron, al mismo grupo de estudiantes que en la etapa anterior, la propuesta didáctica creada y una encuesta sobre su opinión acerca de la actividad didáctica.

#### *4.1.5 Exploración de la imagen conceptual posterior a la implementación de la propuesta didáctica*

En esta etapa se aplicó un cuestionario muy similar al utilizado en la etapa 4.1.3. La elección de preguntas en este ejercicio se realizó pensando en contrastar las respuestas antes y después de la propuesta didáctica.

#### *4.1.6 Análisis y comparación de resultados*

Durante esta etapa se analizaron y compararon los resultados obtenidos en las exploraciones, previa y posterior a la implementación didáctica. Esta etapa se realizó con el objetivo de dar respuesta a la pregunta de investigación que guía este proyecto (declarada en 1.1).

Con el objetivo de profundizar en la exploración de la imagen conceptual, se entrevistó a un estudiante voluntario.

## **4.2 Instrumentos**

En cada etapa del proyecto se usó un instrumento diferente. En esta sección se aborda el contenido de cada instrumento y su propósito.

#### *4.2.1 Cuestionario Google Forms de exploración de la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares usado en las etapas 4.1.1 y 4.1.3*

A continuación, se muestran las preguntas incluidas en este primer cuestionario. Cada pregunta tiene como objetivo explorar diferentes aspectos conceptuales de la noción de sistema de coordenadas polares. Además, cada pregunta se relaciona con alguno de los obstáculos encontrados en la literatura.

- Preguntas 1 y 2.

Obstáculo relacionado: Darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones.

Objetivo: Explorar la imagen conceptual asociada a las coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Aunque estas preguntas se parezcan mucho, una habla del lugar geométrico que se le asocia a las coordenadas  $(r, \theta)$  y la otra habla sobre las coordenadas  $(r, \theta)$  que se le pueden asociar a un lugar geométrico. Cabe mencionar que el enunciado en la pregunta 1 es cierto, mientras que el enunciado en la pregunta 2 es falso.

A cada pareja  $(r, \theta)$  le corresponde UN ÚNICO punto en el plano.

- Verdadero
- Falso

Figura 5: Pregunta 1 del cuestionario de exploración inicial.

A cada punto del plano le corresponde UN ÚNICO par de coordenadas  $(r, \theta)$ .

- Verdadero
- Falso

Figura 6: Pregunta 2 del cuestionario de exploración inicial.

- Pregunta 3

Obstáculo relacionado: Identificar y trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ . Darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones.

Objetivo: Explorar la imagen conceptual evocada al pedir identificar puntos en el plano con valores de  $r$  y  $\theta$  negativos o con theta mayor que  $360^\circ$ .

La pregunta 3, así como la 1 y la 2, se relaciona con el obstáculo “Darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones”, pues si el estudiante selecciona únicamente una de las cinco respuestas correctas, cabría la posibilidad de que el estudiante esté lidiando con este obstáculo. Nótese que un estudiante podría

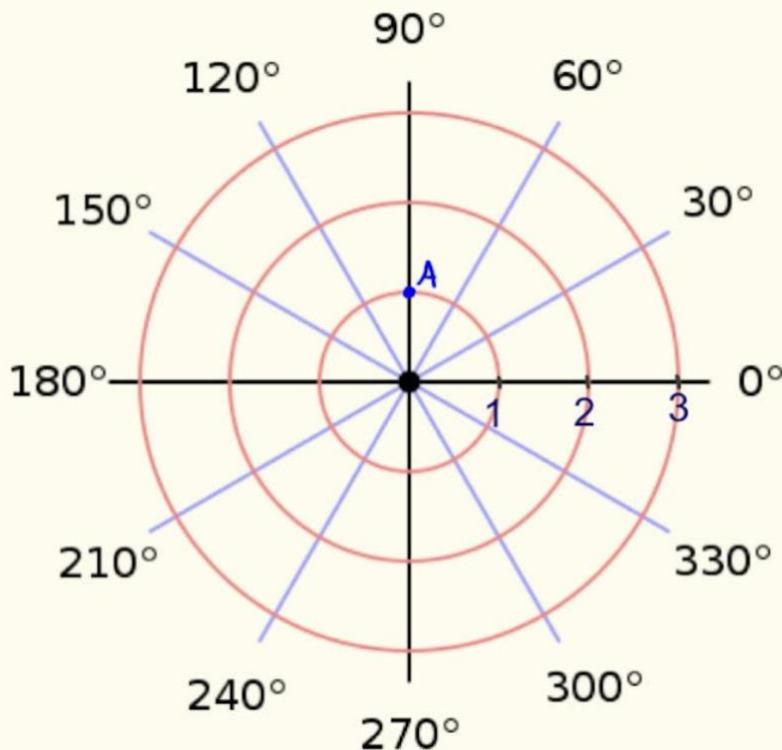
responder bien solo alguna de las preguntas relacionadas a un obstáculo, pues, aunque se aborde el mismo concepto u obstáculo, la imagen conceptual se está evocando de diferente forma.

Por otro lado, la pregunta 3 también se relaciona con el obstáculo “Identificar y trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ ” y está planteada de forma que las respuestas permitan diferenciar entre el problema con  $r$  negativa,  $\theta$  negativa y  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ , cada caso por separado.

¿Cuáles coordenadas corresponden al punto A en el plano polar?

3 puntos

Marca todas las opciones correctas y si no hay respuesta correcta, no marques ninguna opción.



- (2, 90°)
- (1, 90°)
- (-1, 270°)
- (90, 1)
- (90, 1°)
- (1, 450°)
- (1, -270°)
- (-1, 90°)
- (-1, -90°)

Figura 7: Pregunta 3 del cuestionario de exploración inicial.

- Preguntas 4, 5 y 6

Obstáculo relacionado: Reconocer que el polo, centro del plano polar, puede tener múltiples representaciones.

Objetivo: Explorar la imagen conceptual del polo del plano polar.

Se puede observar que, aunque estas tres preguntas están relacionadas a un mismo obstáculo y tienen el mismo objetivo, son preguntas bastante diferentes y de distinta naturaleza. La razón de esto es que se desea explorar la imagen conceptual asociada al polo evocando su imagen conceptual de diferentes maneras.

¿Cuáles coordenadas  $(r, \theta)$  corresponden al polo, origen, en el plano polar?

Tu respuesta

---

Figura 8: Pregunta 4 del cuestionario de exploración inicial.

La gráfica de la siguiente función, ¿pasa por el polo?

$$r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$r(\theta) = \theta - 30$$

- Pasa una vez por el polo
- No pasa por el polo porque está recorrida 30 unidades
- Pasa por el polo más de una vez

Figura 9: Pregunta 5 del cuestionario de exploración inicial.

Selecciona las coordenadas que representan al polo. Selecciona todas las opciones correctas.

- (0, 0°)
- (1, 0°)
- (0, 30°)
- (2, 360°)
- (0, -120°)

Figura 10: Pregunta 6 del cuestionario de exploración inicial.

- Pregunta 7

Obstáculo relacionado: Identificar cuándo una relación entre  $r$  y  $\theta$  es una función en coordenadas polares.

Objetivo: Explorar la imagen conceptual de las funciones en coordenadas polares.

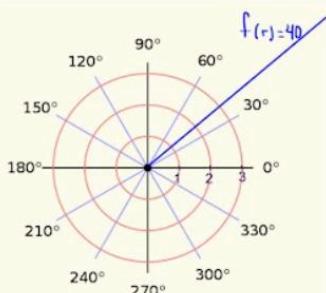
Esta es una pregunta de identificación de ejemplos y contraejemplos que tiene como posibles respuestas imágenes que (ver Figura 11):

- Son gráfica de una función en coordenadas polares (opciones C y F),
- no son gráfica de una función en coordenadas polares, pero podrían ser la gráfica de una función en el plano cartesiano (opciones B y E),
- son gráfica de los lugares geométricos indicados pero que no son función en el sistema de coordenadas polares pues no respetan la convención de que la variable independiente sea  $\theta$  y la variable dependiente sea  $r$  (opción A), y
- no son gráfica de los lugares geométricos indicados como función (opción D).

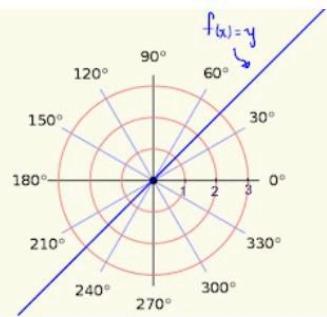
¿Cuál, o cuáles, de las siguientes imágenes muestran la gráfica de una función en coordenadas polares?

1 punto

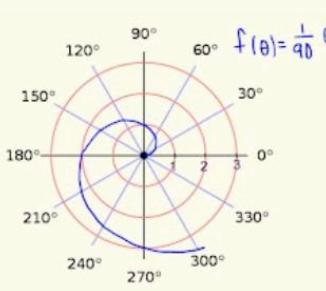
Selecciona todas las opciones correctas.



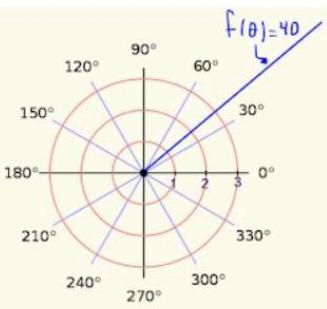
A



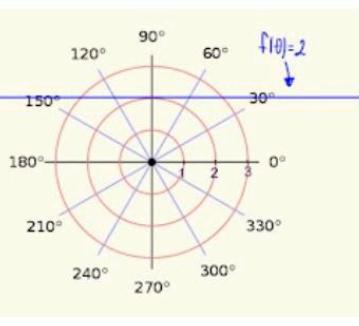
B



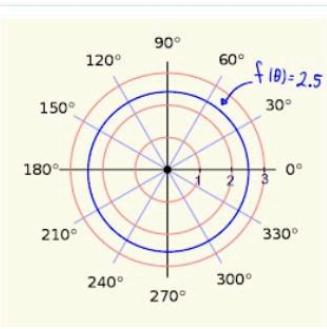
C



D



E



F

Figura 11: Pregunta 7 del cuestionario de exploración inicial.

#### *4.2.2 Cuestionario de exploración de la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares aplicado en clase*

Este cuestionario se aplicó al tercer grupo mencionado en la etapa 4.1.1. La razón de que contenga preguntas diferentes a las del cuestionario aplicado en los otros grupos es que la dinámica seguida en este grupo era muy diferente a la de los otros grupos, en 4.3 se puede encontrar mayor detalle de las dinámicas seguidas en cada grupo. Este cuestionario se diseñó con la esperanza de cubrir tres puntos.

- 1) Hacer preguntas relacionadas con los obstáculos encontrados en la revisión bibliográfica.
- 2) Identificar cuándo y qué tan frecuentemente la imagen conceptual de los estudiantes estaba cerca o alejada de la definición del concepto.
- 3) Que cubriera los temas que el profesor del grupo considerara adecuado evaluar de acuerdo con su prioridad de temas y a lo que él había visto en su clase.

A continuación, se muestra el cuestionario tal y como se les dio a los estudiantes del grupo en cuestión. Posteriormente se mencionará el objetivo y obstáculo relacionado a cada pregunta

## Ejercicios

### El sistema de coordenadas polares

#### Geometría Analítica I

Por favor trata de escribir claramente y justificar tus respuestas. Esta es una actividad individual. Puedes usar calculadora, tus notas de clase y las ayudas disponibles al final de esta hoja. Responde lo mejor que puedas. Si no puedes resolver algo, no te atores, pasa al siguiente ejercicio. ¡Ánimo!

- 1 Dibuja un plano y ubica en él los puntos que corresponden a las siguientes coordenadas polares:  
A= (3,-30°)  
B= (-4,120°)  
C= (1, 210°)  
D= (-1,-315)  
E= (2,675)
- 2 Convierte las coordenadas cartesianas a coordenadas polares.
  - a) (-2,3)
  - b) (-3,-4)
  - c) (8,6)
  - d) (3,-3)
- 3 Grafica, en planos separados, las siguientes funciones en coordenadas polares:  
♡ ) Considera  $\theta$  en grados.  
 $f : [0, 360] \rightarrow \mathbb{R}$  con regla de asignación  $f(\theta) = \frac{\theta}{30} - 3$ .  
★ ) Considera  $\theta$  en radianes.  
 $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  con regla de asignación  $g(\theta) = 4\cos(2\theta) + 2$ .
- 4 ¿La gráfica de la función  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con regla de asignación  $h(\theta) = \cos(\theta)$  pasa por el polo?  
Explica tu respuesta.

- Ayuda disponible

RADIANES	GRADOS	SENO	COSENO	TANGENTE
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Indefinido
$\pi$	180°	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	Indefinido
$2\pi$	360°	0	1	0

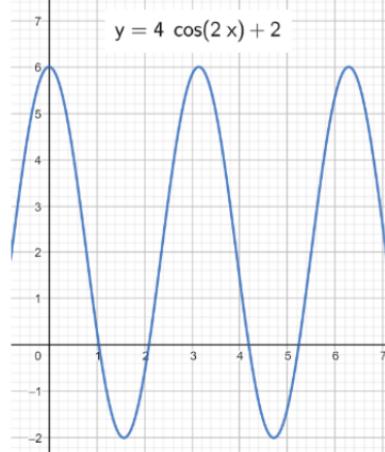


Figura 12. Cuestionario aplicado al grupo 3.

- Pregunta 1

Obstáculo relacionado: Identificar y trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ . Darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones.

Objetivo: Explorar la imagen conceptual evocada al pedir identificar puntos en el plano con valores de  $r$  y  $\theta$  negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ .

- Pregunta 2

Obstáculo relacionado: Convertir coordenadas cartesianas en coordenadas polares.

Objetivo: Explorar la imagen conceptual evocada al pedir convertir coordenadas cartesianas en coordenadas polares y saber si para los estudiantes algunas de estas conversiones son más problemáticas que otras.

- Pregunta 3

Obstáculo relacionado: Graficar funciones en coordenadas polares.

Objetivo: Explorar la imagen conceptual evocada al pedir graficar funciones en coordenadas polares. Identificar qué método de graficación es preferible para los estudiantes y si el uso de un método reporta mayor éxito que el otro.

- Pregunta 4

Obstáculos relacionados: Reconocer que el polo, centro del plano polar, puede tener múltiples representaciones. Darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones.

Objetivo: Explorar la imagen conceptual del polo del plano polar.

#### *4.2.3 Actividades de la propuesta didáctica para realizar en clase*

La propuesta didáctica se conforma de 4 partes:

- 1) Videos
- 2) Actividades con software dinámico
- 3) Cuestionario
- 4) Encuesta

La primera parte consiste en ver los videos que se crearon específicamente para lidiar con los obstáculos de aprendizaje identificados en la literatura. Posteriormente se pide a los estudiantes contestar dos preguntas de reflexión sobre lo que vieron en los videos. En el siguiente cuadro de texto se muestra la primera parte de la propuesta didáctica tal como se compartió con los alumnos. En la pregunta 2 se menciona un cuestionario, esto hace referencia al cuestionario de exploración que se aplicó como tarea en la etapa 4.1.3.

## Empecemos por ver estos 3 videos.

Coordenadas polares: el origen, radio negativo y ángulo negativo.

<https://youtu.be/IH3zRBGPHCA>

¿Un punto con muchas coordenadas?

<https://youtu.be/lz0XIEJ7heg>

Graficar funciones en coordenadas polares: otro método.

<https://youtu.be/rwduBc7s2Qk>

## Luego de ver los videos, toca responder las siguientes preguntas

¿En estos videos viste o escuchaste algo que te pareciera nuevo o que contradijera lo que tú ya sabías?

---

---

Después de ver este video, cambiarías alguna de tus respuestas en el cuestionario? En caso de que la respuesta sea sí, ¿cuál respuesta cambiarías?

---

Figura 13: Primera parte de la propuesta didáctica.

La segunda parte consiste en hacer uso de las actividades en GeoGebra y Desmos que se crearon en la etapa 4.1.2. En el siguiente cuadro de texto se muestra la segunda parte de la propuesta didáctica tal como se compartió con los alumnos.

## **Es hora de experimentar.**

Vamos a visitar cada uno de los siguientes 4 enlaces. Son actividades que permiten visualizar el sistema de coordenadas polares, todas las actividades cuentan con valores, puntos o deslizadores que cada quien puede mover tanto como quiera.

### ***Ubicar puntos en el plano polar***

i) Coordenadas polares, ¿con valor de r negativo?:

<https://www.GeoGebra.org/m/wepzgmbq>

ii) Coordenadas Polares. Variar valores de r y theta:

<https://www.GeoGebra.org/m/zq9ybzhb>

iii) Coordenadas polares. Cambio en r:

<https://www.GeoGebra.org/m/vswcbbc>

### ***Graficar y reconocer funciones en coordenadas polares***

<https://www.desmos.com/calculator/yxphevpwze>

Ya que estás en Desmos, puedes utilizar las barras deslizadoras para ver como va cambiando la gráfica de la función al cambiar los componentes de la función. También puedes cambiar la función para ver la gráfica de cualquier función (en coordenadas polares) que te interese.

Figura 14: Segunda parte de la propuesta didáctica.

#### **4.2.4 Cuestionario de exploración de la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares posterior a las actividades de la propuesta didáctica realizadas en clase**

Dado que la intención de la aplicación de este segundo cuestionario era contrastar las respuestas antes y después de la propuesta didáctica todas las preguntas se corresponden con alguna pregunta del primer cuestionario. En algunos casos las preguntas son las mismas y en otros casos son preguntas muy similares.

Las preguntas uno, dos, cuatro y siete son las mismas que en el primer cuestionario. En cambio, las preguntas tres, cinco y seis son parecidas pero con diferentes datos.

A cada pareja  $(r,\theta)$  le corresponde UN ÚNICO punto en el plano.

- Verdadero
- Falso

Figura 15: Pregunta 1 cuestionario posterior a la propuesta didáctica.

A cada punto del plano le corresponde UN ÚNICO par de coordenadas  $(r,\theta)$ .

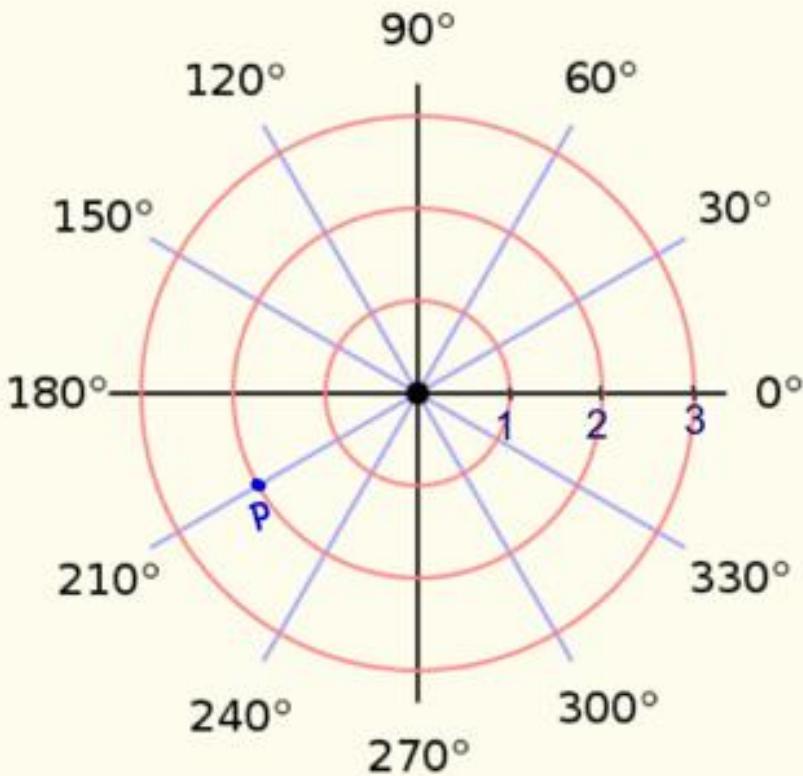
- Verdadero
- Falso

Figura 16: Pregunta 2 del cuestionario posterior a la propuesta didáctica.

¿Cuáles coordenadas corresponden al punto P en el plano polar?

3 puntos

Marca todas las opciones correctas y si no hay respuesta correcta, no marques ninguna opción.



- $(2, -210^\circ)$
- $(210, -2^\circ)$
- $(2, 210^\circ)$
- $(-2, 210^\circ)$
- $(-2, -210^\circ)$
- $(2, 150^\circ)$
- $(2, -150^\circ)$
- $(30, -2^\circ)$
- $(-2, -30^\circ)$
- $(-2, 30^\circ)$
- $(2, 570^\circ)$

Figura 17: Pregunta 3 del cuestionario posterior a la propuesta didáctica.

¿Cuáles coordenadas  $(r,\theta)$  corresponden al polo, origen, en el plano polar?

Your answer

Figura 18: Pregunta 4 del cuestionario posterior a la propuesta didáctica.

La gráfica de la función  $f$ , que va de los reales en los reales, con regla de asignación

$$f(\theta) = (\theta - 4)^2 - 1.$$

¿Pasa por el polo?

- No pasa por el polo
- Pasa una vez por el polo
- Pasa por el polo dos veces

Figura 19: Pregunta 5 del cuestionario posterior a la propuesta didáctica.

Selecciona las coordenadas que representan al polo. Selecciona todas las opciones correctas.

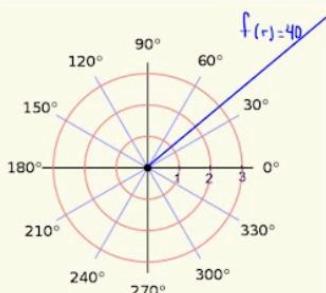
- (0, 0°)
- (0, 310°)
- (3, -360°)
- (360,0°)
- (0, -120°)
- (-1,0)
- (0,-12°)

Figura 20: Pregunta 6 cuestionario posterior a la propuesta didáctica.

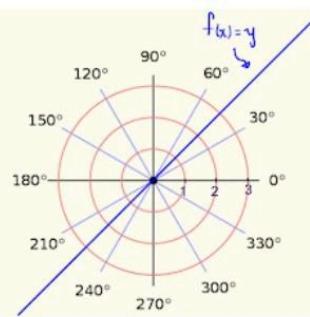
¿Cuál, o cuáles, de las siguientes imágenes muestran la gráfica de una función en coordenadas polares?

1 punto

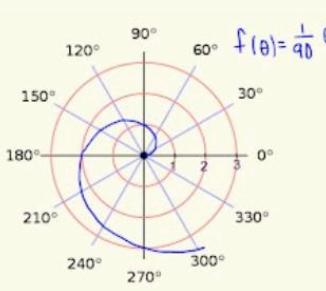
Selecciona todas las opciones correctas.



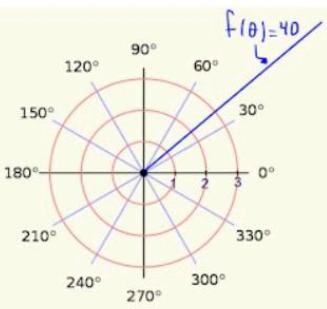
A



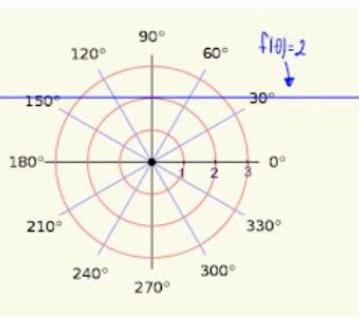
B



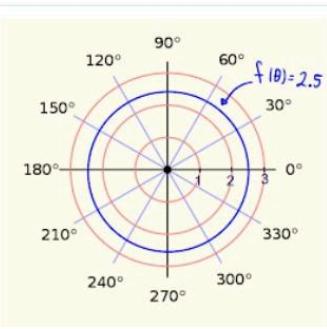
C



D



E



F

Figura 21: Pregunta 7 cuestionario posterior a la propuesta didáctica.

#### 4.2.5 Encuesta

La encuesta constó de tres preguntas que buscaban propiciar reflexiones en los alumnos sobre la utilidad de las actividades de la propuesta didáctica que se realizaron en clase. A continuación se muestran las preguntas de la encuesta.

*Durante las actividades del día de hoy, ¿aprendiste algo nuevo o crees que te sirvieron de algo?*

*Selecciona todas las que apliquen.*

Si, aprendí algo nuevo.  
 Entendí mejor algo que ya sabía.  
 Pude identificar y corregir algunos errores que estaba cometiendo.  
 No

*¿Cuáles de las actividades sientes que te ayudaron más?*

Los videos  
 Las actividades de Geogebra  
 La actividades de Desmos

*¿Por qué crees que estas actividades te ayudaron a mejorar?*

Tu respuesta

Figura 221: Preguntas de la encuesta.

## 4.3 Participantes

Todas las etapas de este proyecto se realizaron a estudiantes que estaban cursando la materia Geometría Analítica 1 en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Los alumnos que toman la materia de Geometría Analítica 1, son alumnos inscritos en las licenciaturas en Matemáticas, Física o Actuaría. Cabe mencionar que esta es una materia obligatoria de primer semestre de las licenciaturas en Matemáticas, Actuaría, Matemáticas Aplicadas, Física, y Física Biomédica de dicha institución. Además, el Sistema de Coordenadas Polares forma parte de su contenido curricular. A grandes rasgos, los temas que se ven en Geometría Analítica 1 son el plano y el espacio cartesiano, lugares geométricos, trigonometría, sistema de coordenadas polares, sistema de coordenadas esféricas, sistema de coordenadas cilíndricas, una introducción a espacios vectoriales, ecuaciones de la recta, ecuaciones de planos y cónicas.

Al momento de abordar el sistema de coordenadas polares en la materia de Geometría Analítica 1 los alumnos ya deben tener conocimiento vasto del plano y el espacio cartesiano, funciones y trigonometría. Además, deben dominar algo de lógica matemática y demostraciones.

La primera exploración de la imagen conceptual (etapa 4.1.1) se realizó con tres grupos que estaban a cargo de tres diferentes docentes. En los primeros dos grupos el método de clase utilizado era aprendizaje invertido siguiendo los videos y notas de la materia en la página de contenido educativo Arilín's Math World (s.f.). En el tercer grupo se seguía un método de clase más tradicional, es decir, en modalidad presencial donde el profesor explica los temas en el salón de clases. Los estudiantes considerados en esta etapa eran alumnos inscritos en la materia de Geometría Analítica 1 de la Facultad de Ciencias de la UNAM durante el semestre agosto-diciembre de 2022.

En cambio, las etapas 4.1.3, 4.1.4 y 4.1.5 se realizaron con un mismo grupo durante el semestre enero-mayo de 2024. Este grupo tenía como profesora a la autora de esta tesis y además contaba con dos ayudantes. Ambos con licenciatura en matemáticas y a mitad de sus

estudios de maestría: uno en riesgo financiero y otro en matemáticas puras. Todos los anuncios y entregas de la materia se hacían por medio de Google Classroom. Con dicho grupo, la exploración previa a la propuesta didáctica se realizó a finales de febrero de 2024. En dicho semestre las clases eran en formato HyFlex. Eso significaba que había algunos alumnos en modalidad presencial y otros tomaban la clase de forma virtual, de forma síncrona o bien asíncrona, según fueran las necesidades y preferencias del alumno. Dicho en otras palabras, se daba la clase en modo presencial, se transmitía por Zoom, se atendía a los alumnos en presencial y en Zoom, y además las clases quedaban grabadas para quienes tomarán la materia en modalidad asincrónica pudieran verlas cuando les fuera conveniente u oportuno. Cabe mencionar que aparte de las grabaciones de las clases, todos los alumnos contaban con libre acceso al material de la materia en la página de la materia en Arilín's Math Word.

#### **4.4 Implementación**

Desde que en 2021 se estaba realizando la revisión bibliográfica a través de la cual se identificaron los primeros obstáculos de aprendizaje relacionados con el sistema de coordenadas polares (Haro y Aguilar, 2024), la autora de esta tesis comenzó a trabajar en la creación de videos que, además de cubrir los conceptos relacionados con el sistema de coordenadas polares dentro de la currícula de Geometría Analítica 1, también ayudaran a los estudiantes a afrontar los obstáculos identificados en la literatura.

La primera exploración de la imagen conceptual formada en los estudiantes luego de ver el sistema de coordenadas polares en clase (etapa 4.1.1) se realizó haciendo pruebas con tres grupos diferentes. En dos grupos, se dejó como tarea un mismo cuestionario en formato Google Forms. Dicho cuestionario contenía preguntas donde se pedía, tanto describir, como reconocer y dar ejemplos de diferentes objetos relacionados con el sistema de coordenadas polares. Otro cuestionario de cuatro ejercicios se dejó como tarea en un tercer grupo y se aplicó durante el tiempo de clase en uno de los dos grupos anteriormente mencionados. Ambos cuestionarios están disponibles en la sección 4.2.

Posterior a la aplicación del cuestionario en los tres grupos, se llevó a cabo un análisis de respuestas para obtener un primer vistazo a las imágenes conceptuales formadas en los estudiantes, así como conocer los obstáculos de aprendizaje reflejados en cada grupo.

Sin embargo, para hacer una exploración más profunda de la imagen conceptual de los estudiantes se llevaron a cabo entrevistas, que fueron grabadas, en las que los estudiantes fueron voluntarios, pues la participación en dichas entrevistas no representaba ningún aporte a su calificación.

También fue durante el año 2022 que se trabajó en las actividades de GeoGebra. Con estas actividades se buscaba que aparte de la explicación, ejemplos e imágenes mostradas en los videos, los alumnos pudieran ver y experimentar por sí mismos la relación entre las coordenadas polares de un punto y su ubicación geométrica en el plano. También en este año se realizó la actividad de Desmos que permite visualizar cómo influye cada uno de los parámetros de una función en la gráfica de esta.

En marzo de 2023, las actividades de GeoGebra y de Demos se compartieron con algunos alumnos. Esto se hizo con el fin de verificar el correcto funcionamiento de las actividades y de recibir retroalimentación de las mismas. Para el segundo semestre de 2023 ya se contaba con el cuestionario exploratorio y con una primera versión de la propuesta didáctica que integrara todas las actividades creadas. Sin embargo, debido a problemas en la logística y a diferentes interrupciones durante el semestre, no fue posible llevar a cabo la propuesta didáctica ni las exploraciones de la imagen conceptual como se había planeado. Sin embargo, esto permitió una reformulación del proceso a seguir para aplicar la propuesta didáctica y medir su impacto en los estudiantes.

Durante el semestre de enero a mayo de 2024 se llevaron a cabo las etapas 4.1.3, 4.1.4 y 4.1.5 con un mismo grupo de estudiantes.

Las exploraciones de la imagen conceptual (etapas 4.1.3 y 4.1.5) se realizaron mediante cuestionarios Google Forms que se dejaron como tarea y que los alumnos podían responder utilizando todos los medios a su alcance en casa o en las instalaciones de la escuela. A diferencia de exploraciones correspondientes a las etapas 4.1.3 y 4.1.5, la propuesta didáctica

se realizó en horario de clase. Las respuestas a las preguntas de esta actividad quedaron registradas Google Classroom. Justo después de implementar la propuesta didáctica se publicaron en el Google Classroom de la materia el cuestionario de exploración posterior a la implementación y la encuesta de reflexión sobre las actividades para que los alumnos respondieran cada uno de ellos de forma voluntaria. La participación en la encuesta, aparte de ser voluntaria se realizó de forma anónima.

Luego de realizar la comparación entre los resultados obtenidos en los cuestionarios previo y posterior a las actividades de la propuesta didáctica se entrevistó a un alumno a fin de hacer una exploración más completa de la imagen conceptual formada en él. De los alumnos que mostraron mejoría, el alumno entrevistado es quien tenía disposición de horario que coincidiera con el de la autora.

## **4.5 Análisis de datos empíricos**

Para los instrumentos que se aplicaron por medio de Google Forms (instrumentos en las secciones 4.2.1, 4.2.4 y 4.2.5) las respuestas de los estudiantes se guardan automáticamente, además es posible consultar las respuestas de cada estudiante o bien ver un resumen de las respuestas de los estudiantes pregunta por pregunta. El análisis de los datos recopilados de esta manera se hizo dentro de la página de Google Forms. Para explorar la imagen conceptual formada en los estudiantes el análisis se hizo haciendo consultas a las respuestas, estudiante por estudiante. En cambio, la vista pregunta por pregunta facilitó la localización de los obstáculos de aprendizaje y la identificación de imágenes conceptuales alejadas de la definición del concepto en varios estudiantes. Para comparar las imágenes conceptuales antes y después de la implementación didáctica se creó un documento Google Sheets donde se tenía un renglón por estudiante y en las columnas aparecieran las respuestas a cada una de las preguntas de los cuestionarios.

Las respuestas del cuestionario aplicado en clase durante la primera etapa se entregaron por medio de Google Classroom y quedaron guardadas en una carpeta de Google Drive. A su

vez, las respuestas a las dos preguntas relacionadas con los videos de la propuesta didáctica se registraron también en Google Classroom.

El análisis de los datos se realizó en parte dentro de las plataformas de Google Forms o de Google Classroom y cuando se consideró conveniente se pasaron los datos a hojas de Excel o de Word.

Durante el análisis de los datos se buscaba, además de explorar las imágenes conceptuales de los estudiantes, comentarios o procesos que hicieran referencia tanto a la identificación de obstáculos de aprendizaje, como de posibles enriquecimientos de la imagen conceptual y de las situaciones que pudieran propiciarlos.

#### **4.6 Conclusión del capítulo**

A lo largo de este capítulo se da detalle de cada punto de la metodología que se siguió durante esta investigación. Sin embargo, a grandes rasgos la metodología que se siguió fue la siguiente.

Todas las etapas de la investigación se llevaron a cabo con estudiantes de Geometría Analítica 1 en la UNAM. Inicialmente, en 2021, con base en los hallazgos de la revisión bibliográfica se desarrollaron videos explicativos. Luego de abordar el sistema de coordenadas polares en clases, en septiembre de 2022, se implementó un cuestionario exploratorio de la imagen conceptual que ayudó a detectar conceptos propios del sistema de coordenadas polares en los que la imagen conceptual suele estar alejada de la definición del concepto. Durante los años 2022 y 2023 se crearon tres actividades de GeoGebra y 1 de Desmos con el objetivo de ayudar a los estudiantes a enriquecer la imagen conceptual formada. En marzo de 2023, la propuesta didáctica aun no estaba completa, sin embargo, el material creado (videos y actividades de GeoGebra y Desmos) fue compartido con algunos estudiantes. En el segundo semestre de 2023, aunque no se pudo implementar completamente la propuesta didáctica, se utilizó el material y se reformuló el proceso a seguir para la propuesta didáctica. Finalmente, de enero a mayo de 2024, se realizaron las exploraciones de

imagen conceptual y la implementación de la propuesta didáctica con un grupo que estaba bajo un formato HyFlex, combinando clases presenciales y virtuales.

# CAPÍTULO 5

## RESULTADOS

### 5.0 Introducción al capítulo

A lo largo de este capítulo se habla de los hallazgos que resultaron de las exploraciones a las imágenes conceptuales, asociadas al sistema de coordenadas polares, formadas en los estudiantes.

En la sección 5.1 se evidencia que los obstáculos de aprendizaje localizados en la revisión bibliográfica coinciden con imágenes conceptuales evocadas que resultan ser incompletas o erróneas en los estudiantes. En la sección 5.2, a fin de saber si la propuesta didáctica sirvió, o no, para enriquecer la imagen conceptual de los estudiantes, se comparan los resultados obtenidos en las exploraciones de las imágenes conceptuales formadas en los estudiantes antes, y después, de implementar la propuesta didáctica en clase.

### 5.1 Resultados de la exploración inicial

En esta sección se habla sobre los resultados obtenidos en los cuestionarios y las entrevistas realizadas en la primer etapa (4.1.1). Con el fin de no hacer muy extenso este escrito, solamente se mencionan los resultados que evidencian los obstáculos con los que se enfrentan los alumnos y que a su vez brindan la oportunidad de intentar enriquecer la imagen conceptual formada en los mismos.

#### *5.1.1 Sobre las múltiples representaciones del polo.*

En el cuestionario aplicado a los grupos 1 y 2 de la exploración inicial había tres preguntas que hacían referencia al polo en el plano polar. Aunque se habla de un mismo concepto, las respuestas obtenidas muestran que al evocar una misma imagen conceptual de diferente forma se pueden obtener imágenes conceptuales diferentes. Algunas de estas imágenes conceptuales evocadas pueden, además de estar alejadas de la definición del concepto, ser contradictorias entre sí.

Las preguntas relacionadas con el polo eran las preguntas 4, 5 y 6 del cuestionario Google Forms.

En la pregunta 4 se le pedía a los estudiantes decir cuáles coordenadas  $(r, \theta)$  corresponden al polo. Para la mayoría de los estudiantes su respuesta fue correcta. Un resumen de las respuestas se muestra en la siguiente tabla.

Respuesta	Cantidad de alumnos del grupo 1	Cantidad de alumnos del grupo 2	Total
$(0, \theta)$	25	20	45
$(0, 0)$	5	3	8
Otra respuesta	3	2	5
Total	33	25	58

**Tabla 3.** Cantidad de estudiantes que eligieron cada respuesta clasificados por grupo.

En la pregunta 5 se le pedía a los estudiantes seleccionar las coordenadas  $(r, \theta)$  correspondientes al polo. Para la mayoría de los estudiantes su respuesta fue correcta. Un resumen de las respuestas se muestra a continuación.

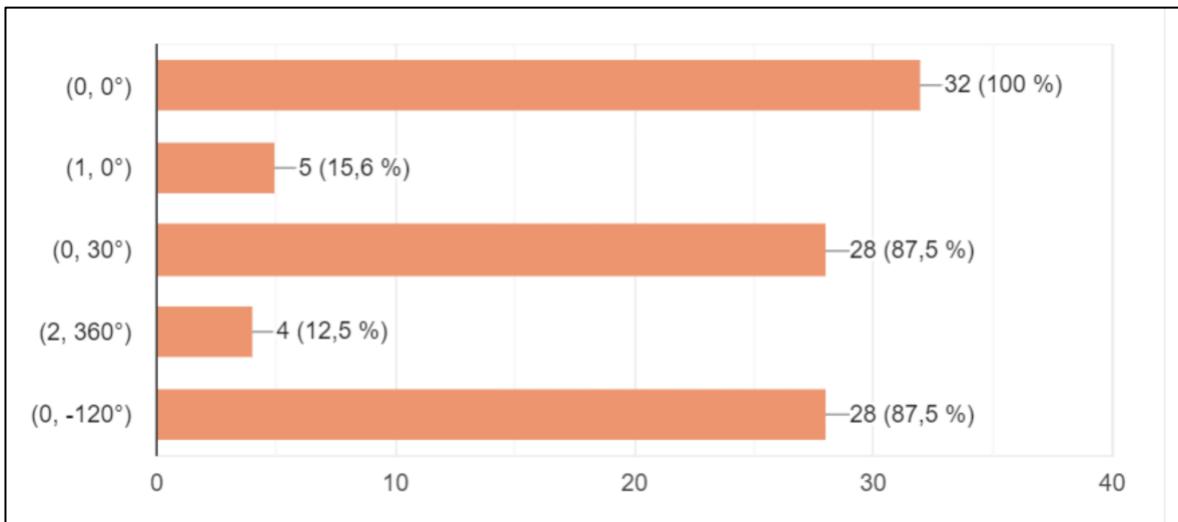


Figura 232: Respuestas del grupo 1 a la pregunta 5.

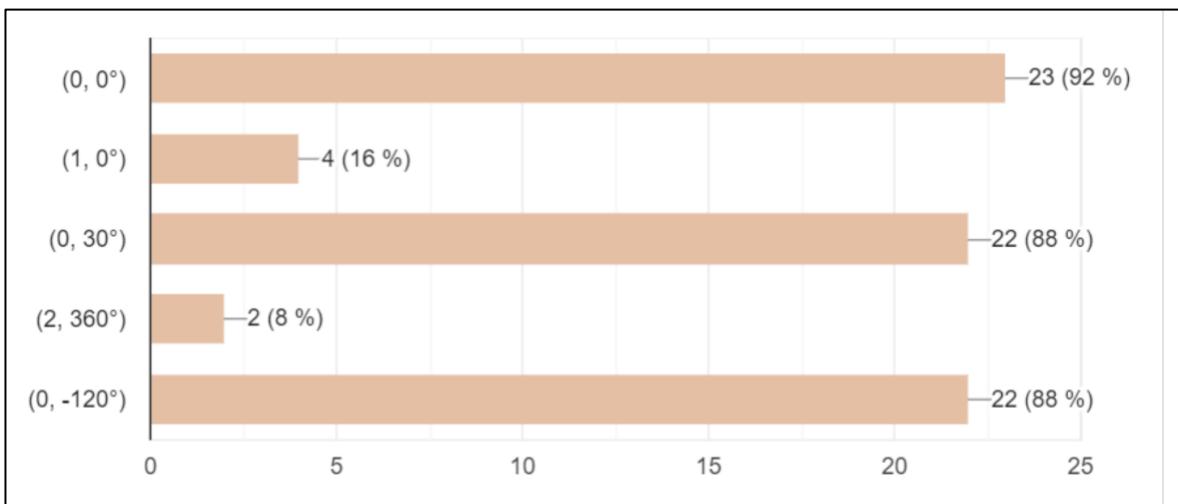


Figura 24: Respuestas del grupo 2 a la pregunta 5.

En esta pregunta se obtuvo que 50 de los 58 estudiantes dieron la respuesta correcta, a pesar de que sólo 45 de ellos acertaron con la respuesta a la pregunta anterior. Esto deja ver cinco alumnos con imágenes conceptuales contradictorias del polo.

La pregunta 6 también evocaba la imagen conceptual del polo pero preguntando si la gráfica de la función que va de los reales en los reales,  $r(\theta) = \theta - 30$ , pasa por el polo.

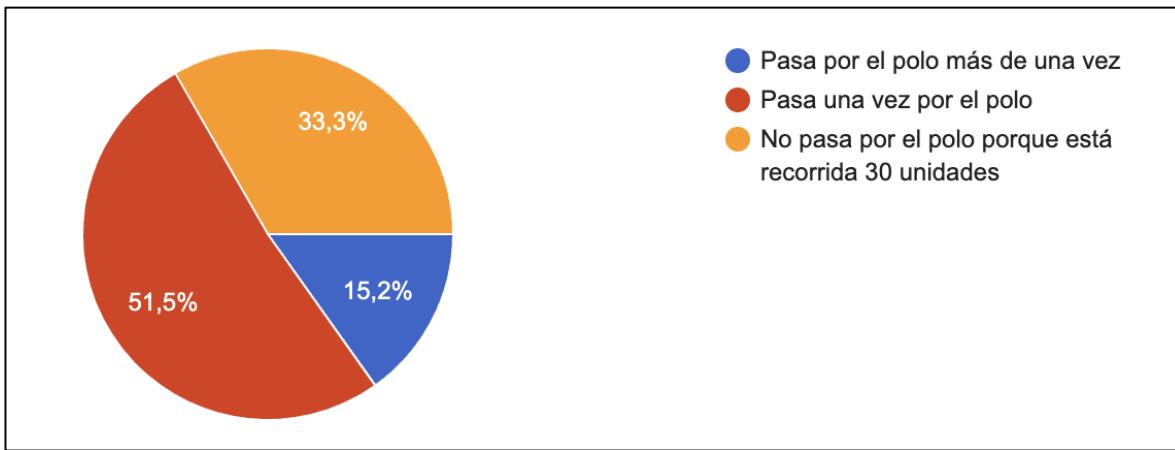


Figura 25: Respuestas del grupo 1 a la pregunta 6.

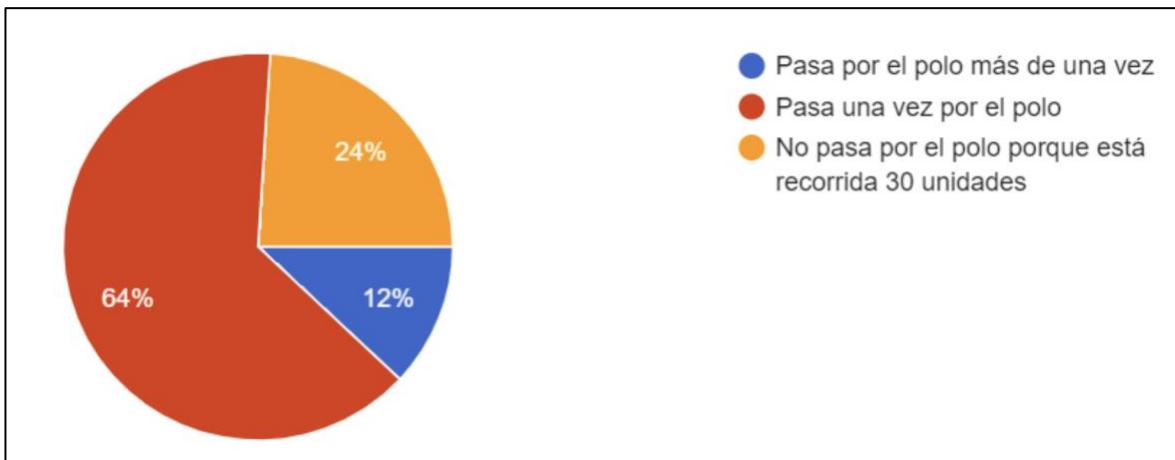


Figura 26: Respuestas del grupo 2 a la pregunta 6.

La primer observación es que de los 58 alumnos que respondieron esta pregunta se tuvo que solamente 33 seleccionó la respuesta correcta. También se observó que 17 de los estudiantes opinaron que la gráfica de la función no pasa por el polo porque está recorrida 30 unidades. Esto se debió a que, para decidir si la gráfica pasa por el origen, igualaron  $r(\theta)$  a 0, y al obtener que para que  $r$  fuera cero entonces  $\theta$  debía ser 30. Así que, en este momento, a pesar de haber seleccionado  $(0, 30)$  como coordenadas del polo en la pregunta anterior del cuestionario, les pareció que las coordenadas  $(0, 30)$  ya no correspondían al polo.

Hablando de las preguntas que hacían referencia al polo esta última pregunta, además de evidenciar imágenes conceptuales evocadas contradictorias entre sí, fue la que representó un mayor obstáculo para los estudiantes.

### 5.1.2 Sobre las múltiples representaciones de un punto en el sistema de coordenadas polares.

En el cuestionario aplicado a los grupos 1 y 2 durante la exploración inicial, las primeras dos preguntas hacían referencia al obstáculo: “Darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones.” En seguida se muestran las respuestas obtenidas en cada grupo.

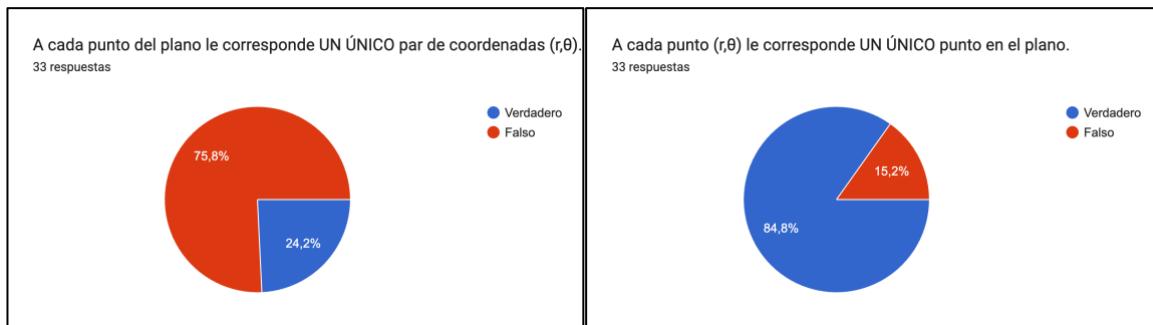


Figura 3: Respuestas del grupo 1 a las preguntas 1 y 2.

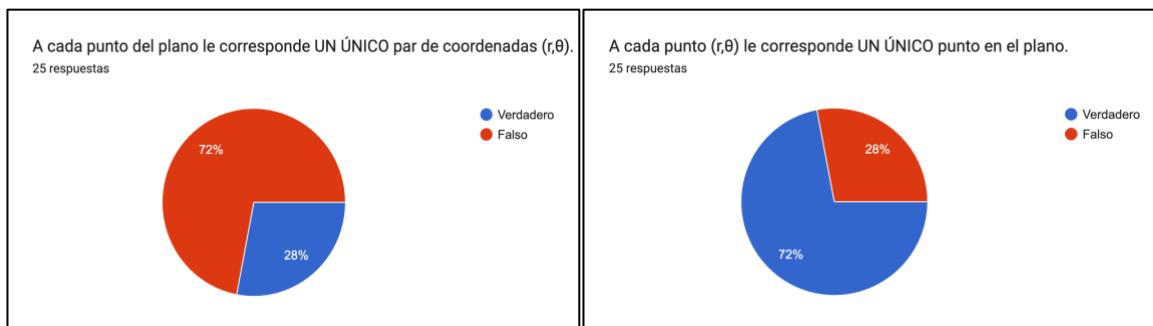


Figura 4: Respuestas del grupo 2 a las preguntas 1 y 2.

Al analizar estas respuestas se tiene que en el grupo 2 el 28% de los alumnos (7 de 25) refleja una imagen conceptual que difiere de la definición del concepto de la relación que hay entre las coordenadas  $(r, \theta)$  y su ubicación en el plano polar. Ellos manifestaban que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene una única representación de coordenadas polares  $(r, \theta)$  y que a las coordenadas  $(r, \theta)$  les puede corresponder más de un punto en el plano.

polar. Sin embargo, en el grupo 1 se verificó que 5 de los 33 alumnos reflejan esa misma imagen conceptual errónea. Por su parte, otros 3 de los 33, alumnos manifiestan una imagen conceptual errónea, pero diferente de la relación entre las coordenadas polares y su ubicación en el plano. Estos 3 alumnos aparentan pensar que la correspondencia entre las coordenadas  $(r, \theta)$  y los puntos del plano es uno a uno.

En resumen, si se consideran ambos grupos como una sola población se tiene que 43 de los 58 alumnos, aproximadamente 74%, manifiesta imágenes conceptuales evocadas correctas, es decir que coinciden con la definición del concepto.

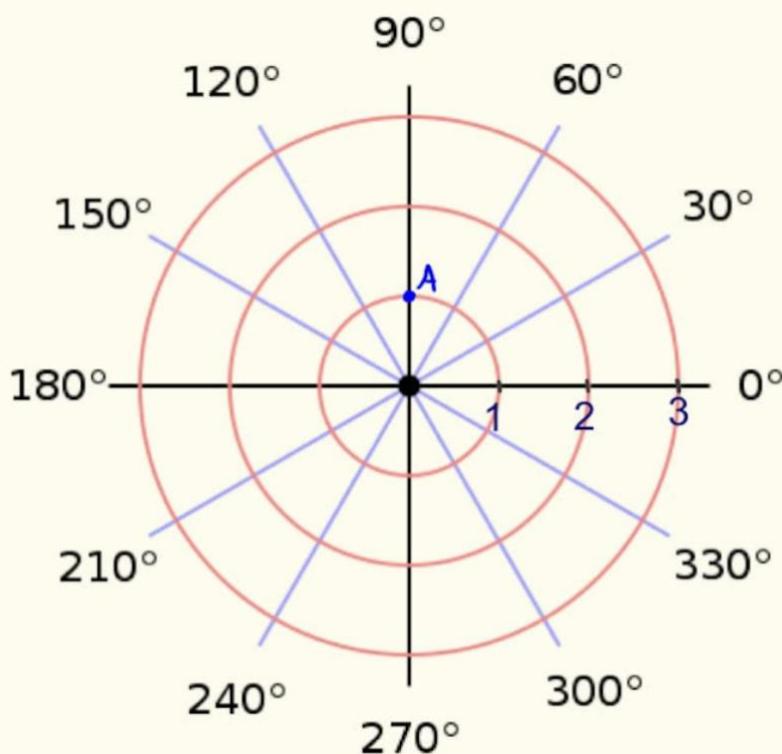
*5.1.3 Sobre identificar y trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ .*

En el cuestionario de Google Forms la pregunta 3 pedía identificar todas las coordenadas  $(r, \theta)$  que correspondieran a un punto dado en el plano polar. Las posibles respuestas a esta pregunta comprendían una respuesta con  $r$  positiva y  $\theta$  entre 0 y  $360^\circ$ , pero también contaba con respuestas correctas que muestran  $r$  y  $\theta$  con valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ .

¿Cuáles coordenadas corresponden al punto A en el plano polar?

3 puntos

Marca todas las opciones correctas y si no hay respuesta correcta, no marques ninguna opción.



- (2,  $90^\circ$ )
- (1,  $90^\circ$ )
- (-1,  $270^\circ$ )
- (90, 1)
- (90,  $1^\circ$ )
- (1,  $450^\circ$ )
- (1,  $-270^\circ$ )
- (-1,  $90^\circ$ )
- (-1,  $-90^\circ$ )

Figura 5: Pregunta 3 del cuestionario de exploración inicial.

De las posibles respuestas, las coordenadas que representan al punto A son:  $(1, 90^\circ)$ ,  $(-1, 270^\circ)$ ,  $(1, 450^\circ)$ ,  $(1, -270^\circ)$  y  $(-1, -90^\circ)$ .

En seguida se muestran las respuestas de ambos grupos:

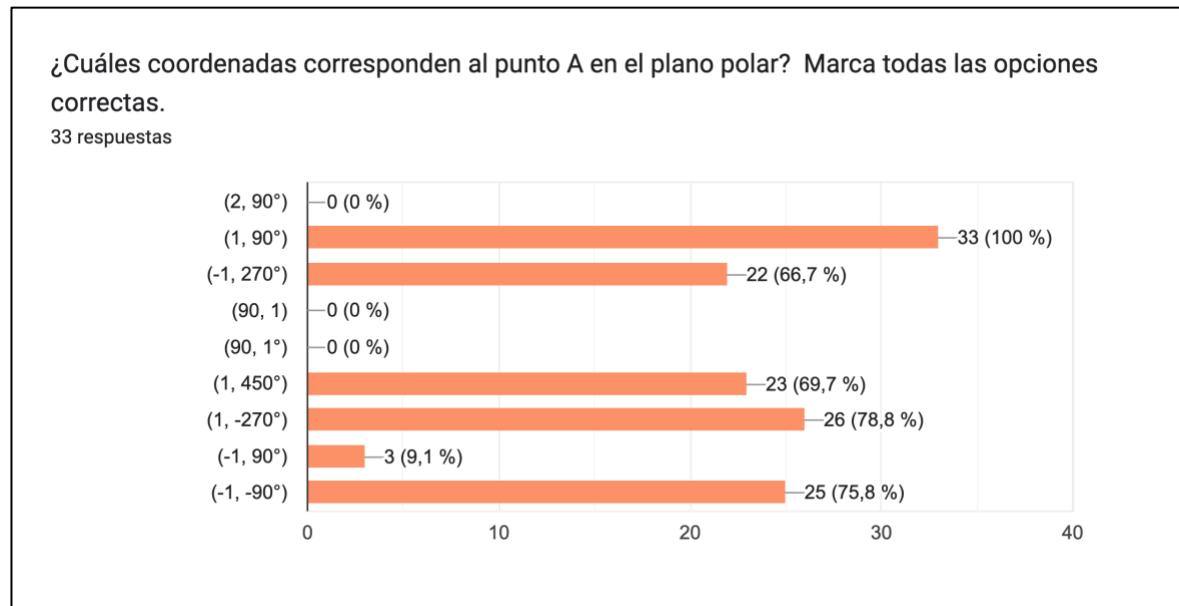


Figura 6: Respuestas del grupo 1 a la pregunta 3.

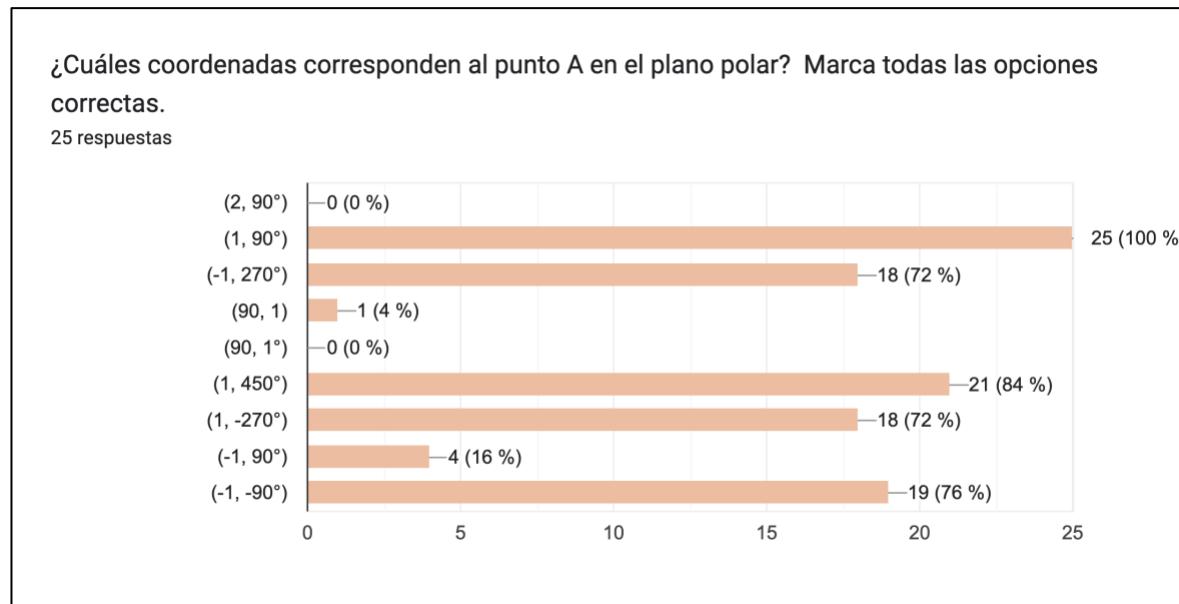


Figura 7: Respuestas del grupo 2 a la pregunta 3.

Al analizar estas respuestas surgen varias observaciones:

- a) Todos los alumnos de ambos grupos seleccionaron la opción correcta que tiene  $r$  positiva y  $\theta$  entre  $0$  y  $360^\circ$ .
- b) Menos del 70% de los 58 estudiantes reconocieron como correcta opción con la coordenada  $r$  negativa.
- c) En total 75% de los alumnos seleccionaron la respuesta correcta con coordenada  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ .
- d) En total 75% de los alumnos seleccionaron la respuesta correcta con coordenada  $\theta$  negativa. Cabe notar que los estudiantes de este 75% no coinciden completamente con los estudiantes de 75% mencionado en la observación anterior.
- e) En total 75% de los alumnos seleccionaron la respuesta correcta con coordenadas  $r$  y  $\theta$  negativas. Cabe mencionar que los estudiantes de este 75% no coinciden completamente con los estudiantes de 75% mencionados en las dos observaciones anteriores.
- f) En total 12% de los 58 alumnos seleccionaron como correcta una opción equivocada con coordenada  $r$  negativa.

De acuerdo con esta clasificación de errores en la selección de ejemplos y contraejemplos, al menos un 25% de los alumnos manifiesta comportamientos de Missing ejemplos al no seleccionar las opciones  $(-1, 270^\circ)$ ,  $(1, 450^\circ)$ ,  $(1, -270^\circ)$  y  $(-1, -90^\circ)$  como respuestas correctas. Y a su vez, un 12% de los estudiantes manifiesta comportamientos de Mis-in ejemplos al seleccionar  $(1, -90^\circ)$  como respuesta correcta.

El reto de trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$  también estaba incluido en la pregunta 1 del cuestionario de cuatro preguntas utilizado con el tercer grupo de estudiantes que participaron en la exploración inicial.

- 1 Dibuja un plano y ubica en él los puntos que corresponden a las siguientes coordenadas polares:
- A=  $(3, -30^\circ)$   
 B=  $(-4, 120^\circ)$   
 C=  $(1, 210^\circ)$   
 D=  $(-1, -315^\circ)$   
 E=  $(2, 675^\circ)$

Figura 8: Pregunta 1 del cuestionario aplicado en el grupo 3.

Al analizar las respuestas a esta pregunta se aprecia que para la coordenada  $r$ , cualquier valor no positivo parece ser problemático y con la coordenada  $\theta$ , no sólo los valores negativos son problemáticos, también los valores mayores que  $360^\circ$  o  $2\pi$  radianes son un obstáculo para ciertos estudiantes. En seguida se muestran las respuestas de cinco estudiantes del grupo 3 a la pregunta 1 del cuestionario.

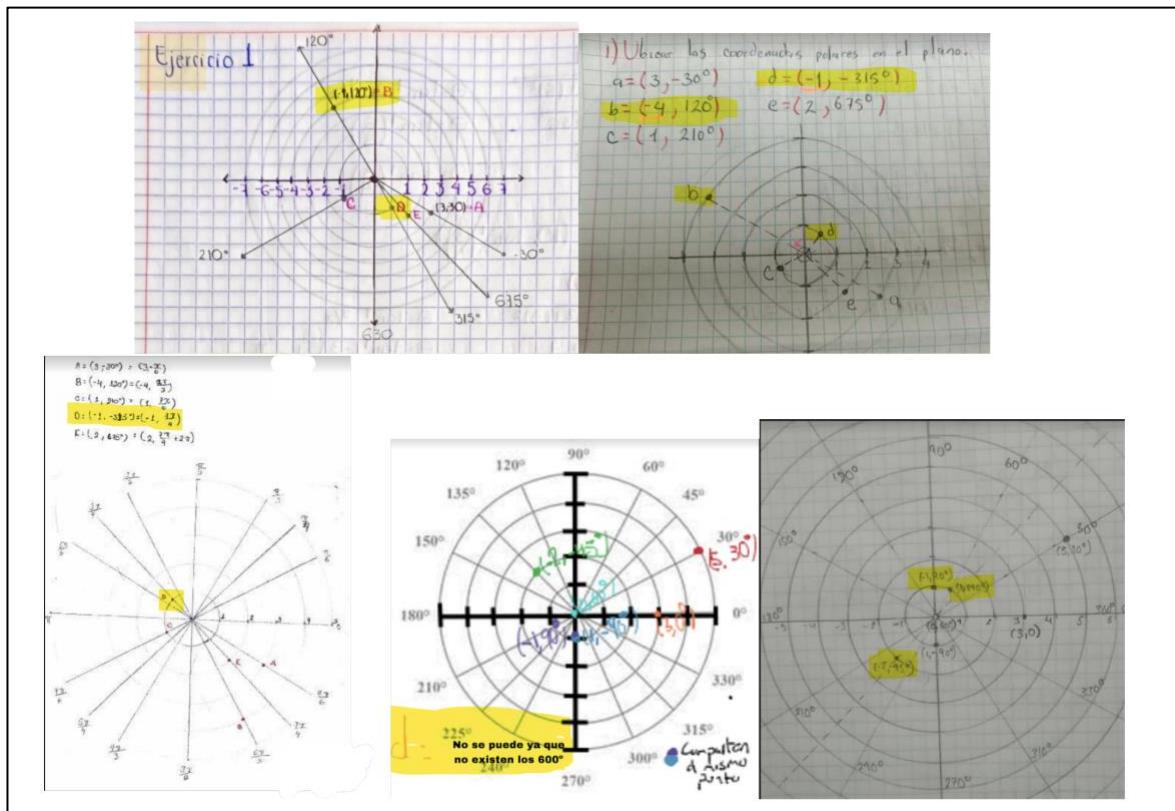


Figura 9: Ejemplos de respuestas a 1 del cuestionario aplicado en el grupo 3.

Las imágenes anteriores muestran las respuestas de cinco estudiantes diferentes que se toparon con el obstáculo de ubicar puntos en el plano polar con coordenadas  $(r, \theta)$

“inconvenientes”, es decir, puntos con coordenadas negativas o bien con un ángulo mayor a  $360^\circ$ .

Una de las entrevistas realizadas fue con un estudiante que había ubicado mal los puntos que involucraban coordenada  $r$  negativa, y cuando se le preguntó el proceso para graficar estos puntos, él mencionó que “se busca el ángulo correcto y luego se camina en sentido contrario para ubicar la distancia negativa”. Dado que el proceso que él describe es correcto, esto podría interpretarse como que el estudiante sabía “en teoría” cómo ubicar los puntos con coordenada  $r$  negativa, pero en la práctica, no realiza el mismo proceso. Una vez más, para un mismo concepto e individuo, se obtienen imágenes conceptuales evocadas diferentes. En este caso las dos formas diferentes de evocar fueron preguntar por el proceso a seguir (la teoría) y pedir ubicar un punto (la práctica).

#### *5.1.4 Sobre convertir coordenadas cartesianas a polares*

Para abordar este obstáculo se contaba con la pregunta 2 del cuestionario aplicado al grupo 3.

- 2 Convierte las coordenadas cartesianas a coordenadas polares.
- a)  $(-2,3)$
  - b)  $(-3,-4)$
  - c)  $(8,6)$
  - d)  $(3,-3)$

*Figura 10: Pregunta 2 del cuestionario aplicado al grupo 3.*

En la siguiente imagen se muestra la respuesta de un alumno del grupo 3. Lo interesante de esta respuesta es, que no es un caso aislado, sino que se repite en varios alumnos del grupo 3. Y este mismo fenómeno también ha sido observado, aunque no documentado, en los grupos de Geometría Analítica 1 en los que la autora ha dado clase. Es decir, el comportamiento mostrado, se trata de un caso representativo, no de un caso excepcional.

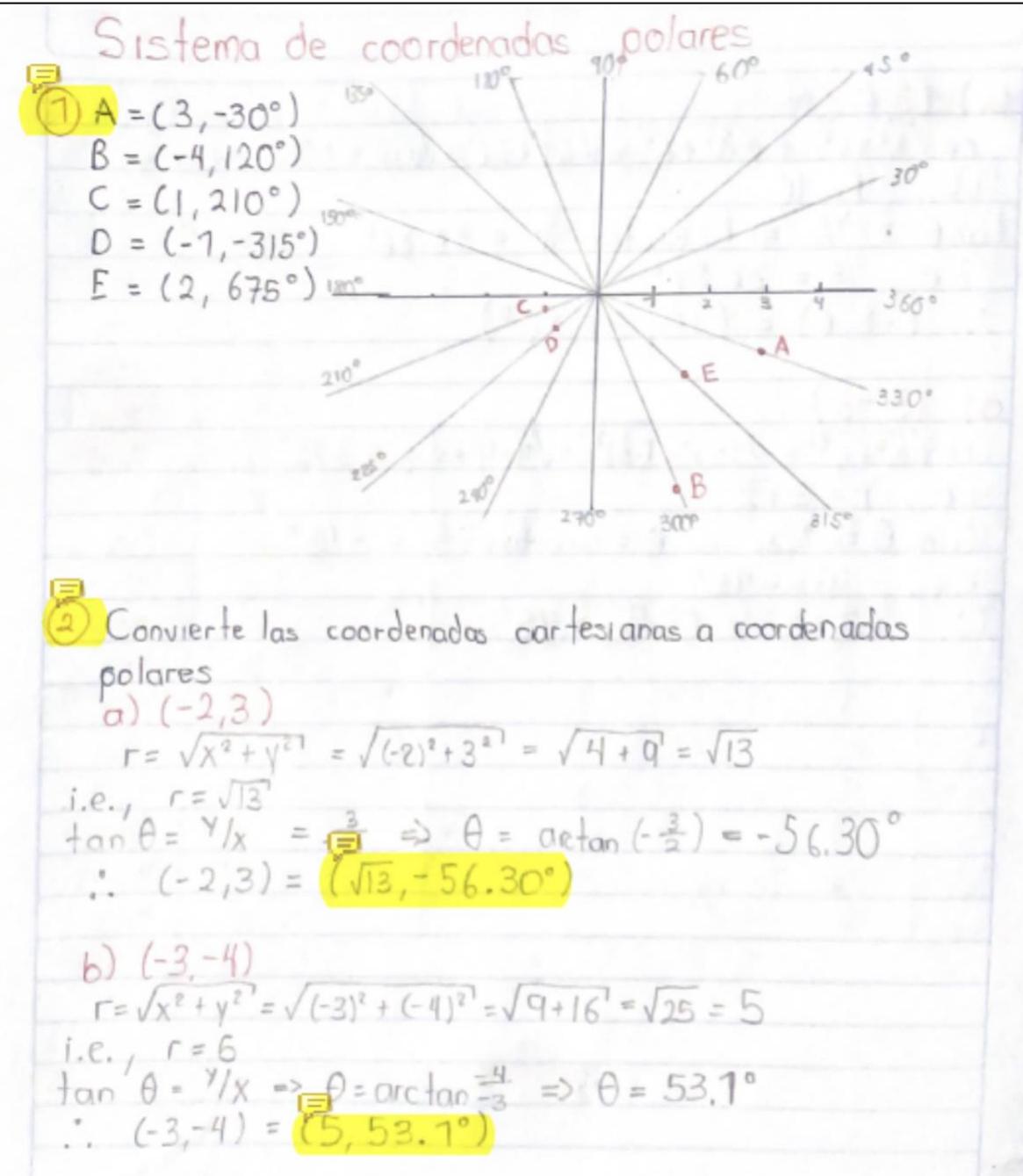


Figura 11: Respuesta a las preguntas 1 y 2 del cuestionario de cuatro preguntas aplicado al grupo 3.

Las respuestas como las de la imagen sugieren que el alumno hace la conversión de coordenadas simplemente aplicando las fórmulas. A partir de su respuesta en la pregunta 1 se puede pensar que el alumno sí sabe ubicar puntos en el plano polar, sin embargo, aplica la fórmula y confía en el resultado de la calculadora, a pesar de que la ubicación del punto

obtenido en coordenadas polares no coincide con la ubicación del punto en coordenadas rectangulares.

Para profundizar en este fenómeno se entrevistó a dos alumnos que habían cometido este tipo de errores. Se les preguntó específicamente por el procedimiento que siguen al convertir de coordenadas cartesianas a polares y la primera respuesta fue: “creo que es un poco formulazo...”. En el ejercicio donde se les pedía convertir  $(-2,3)$  a coordenadas polares ambos estudiantes tenían respuestas diferentes, así que se les preguntó, ¿cómo podríamos saber cuál respuesta era correcta?, y la respuesta fue “graficando”. Ambos estudiantes estuvieron de acuerdo en que para saber qué respuesta era correcta podían graficar las respuestas obtenidas y elegir la que coincidiera con la ubicación del punto  $(-2,3)$  del plano cartesiano. Aquí la visualización, de acuerdo a Arcavi (2003), hace su aparición en su papel de “¿más que creerlo? Quizás ¿también lo prueba?” pues los estudiantes están de acuerdo en que graficar los puntos demostrará la veracidad de su respuesta.

#### *5.1.4 Sobre identificar cuándo una relación entre $r$ y $\theta$ es una función en coordenadas polares.*

Para analizar este aspecto de la imagen conceptual, en la pregunta 7 del cuestionario de Google Forms, se pidió a los estudiantes de los grupos 1 y 2 seleccionar las imágenes que representaran la gráfica de una función en coordenadas polares. Las imágenes que se les mostraban eran las siguientes:

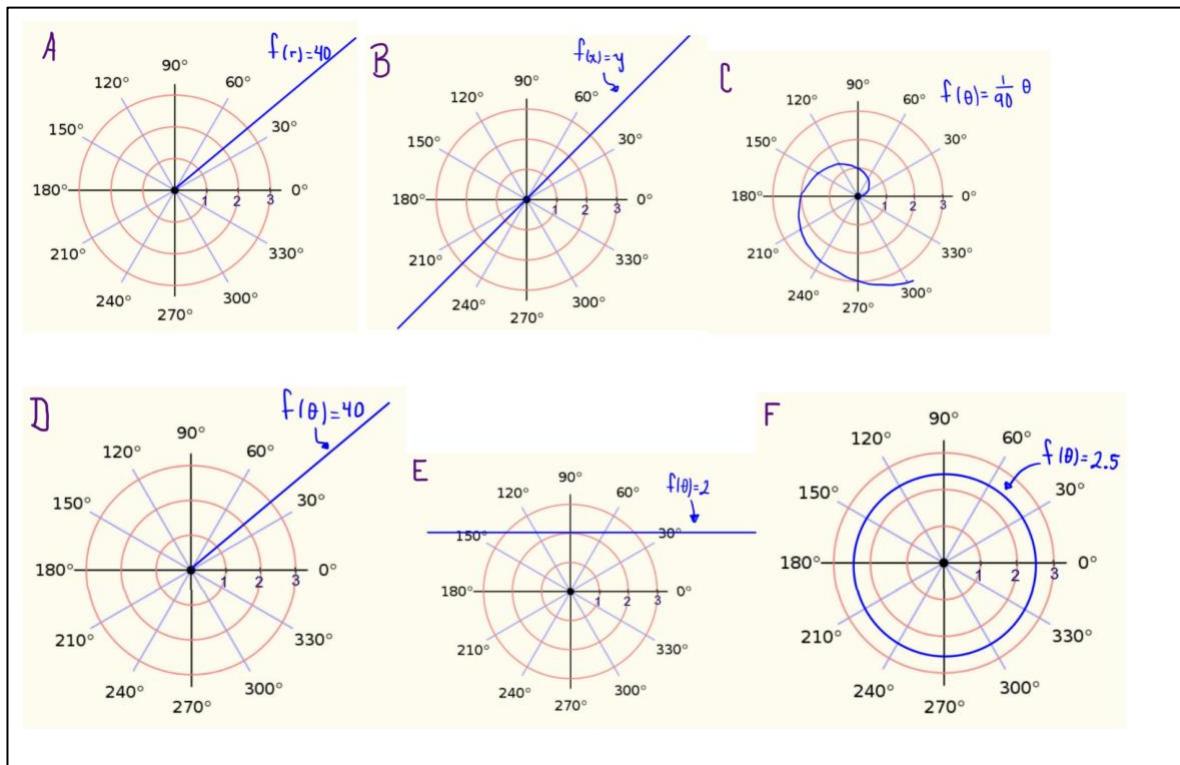


Figura 12: Opciones disponibles en la pregunta 7.

De las seis imágenes anteriores, sólo las opciones C y F muestran la gráfica de una función en coordenadas polares. Sin embargo, en el grupo 1 sólo el 84.4% reconoció la opción C como correcta, mientras que en el grupo 2, menos del 70% reconoció la opción C como correcta. Respecto a la opción F, sólo el 90.6% y el 80% de los estudiantes de los grupos 1 y 2 respectivamente, reconocieron esta opción como correcta. El caso contrario también es bastante notorio, un 40.6% y un 36% de los estudiantes de los grupos 1 y 2 marcaron la opción D como función, a pesar de no serlo, ya que muestra el espacio geométrico que podría representar  $\theta = 40^\circ$  en vez de  $f(\theta) = 40$ . La opción A también resultó bastante popular en ambos grupos, sin embargo, esta relación no es función ya que, en vez de  $\theta$ , toma a  $r$  como variable independiente.

Las respuestas de ambos grupos se muestran a continuación.

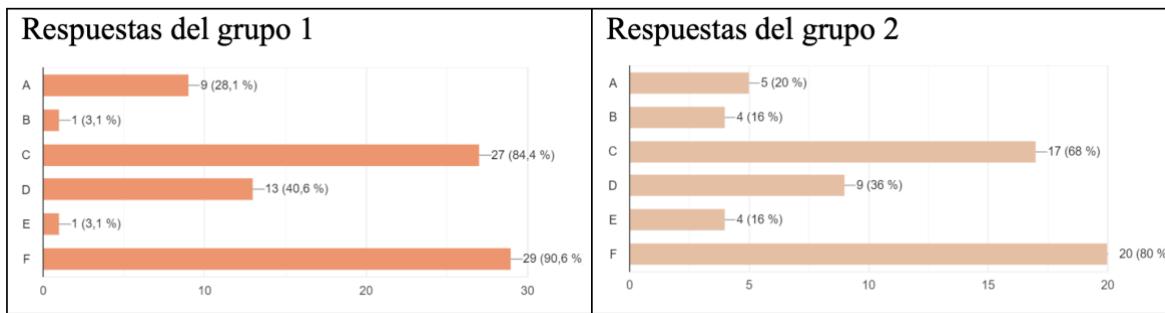


Figura 13: Respuestas de ambos grupos a la pregunta 7 del cuestionario.

Luego de analizar las respuestas a esta pregunta, estudiante por estudiante se observó que en los grupo 1 y 3 respectivamente hubo 13 y 6 alumnos que acertaron a seleccionar las dos opciones correctas. Es decir, de los 58 alumnos que eran en total, únicamente 19 respondieron esta pregunta correctamente. Lo cual sugiere que aproximadamente 67% de los alumnos tienen una imagen conceptual de las gráficas de las funciones en el sistema de coordenadas polares que es errónea. Pues al seleccionar las opciones A, B, D o E manifiestan errores tipo Mis-ing en la selección de ejemplos. En cambio, al no seleccionar las opciones C y F manifiestan errores tipo Missing en la selección de ejemplos. Es digno de remarcar que de todos los alumnos de ambos grupos, no hubo ninguno que se salvara de manifestar alguno de estos errores de clasificación de ejemplos.

### 5.1.6 Sobre graficar funciones en coordenadas polares

Se tuvo la oportunidad de explorar este obstáculo al analizar las respuestas obtenidas en la pregunta 3 del cuestionario aplicado al grupo 3.

- 3 Grafica, en planos separados, las siguientes funciones en coordenadas polares:  
 ☺ ) Considera  $\theta$  en grados.  
 $f : [0, 360] \rightarrow \mathbb{R}$  con regla de asignación  $f(\theta) = \frac{\theta}{30} - 3$ .  
 \* ) Considera  $\theta$  en radianes.  
 $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  con regla de asignación  $g(\theta) = 4\cos(2\theta) + 2$ .

Figura 14: Pregunta 3 del cuestionario aplicado al grupo 3.

En concordancia con los resultados presentados en Borji et al. (2020), el problema principal con la graficación de funciones parece ser que el método de tabulación puede llevar a los estudiantes a dibujar gráficas muy alejadas de la realidad. Por ejemplo, tanto en clase normal con el grupo 1 como en el cuestionario del grupo 3 se les pidió graficar la función  $f(\theta) = 4\cos(2\theta) + 2$  en un dominio de  $[0, 2\pi]$ , lo cual llevó a varios estudiantes a dibujar gráficas como las siguientes imágenes. Cabe destacar, que cerca de un tercio de los alumnos ni siquiera intentó hacer un dibujo que representase la gráfica de dicha función.

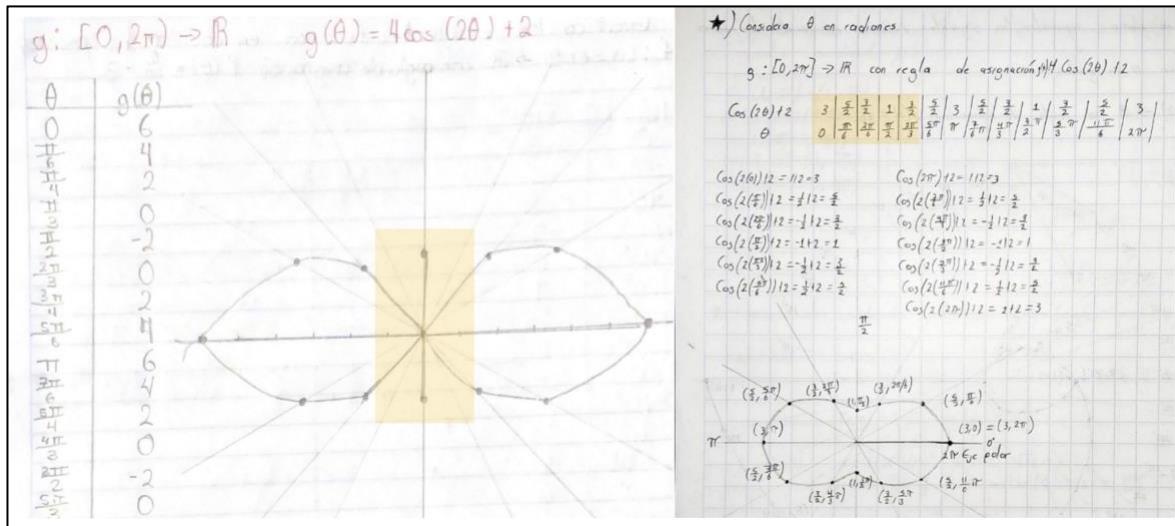


Figura 15: Respuestas a la pregunta 3 del cuestionario aplicado al grupo 3.

Los tres estudiantes entrevistados mencionaron que para ellos el mayor reto con las coordenadas polares había sido graficar funciones. Cuando se les preguntó sobre dificultades específicas ellos mencionaron que para tener una buena gráfica había que hacer muchas tabulaciones y eso era muy tardado. Uno de los estudiantes manifestó que a pesar de haber tabulado y ubicado los puntos, le costaba mucho saber cómo debería unir los puntos ubicados.

## 5.2 Resultados de la implementación de la propuesta didáctica

La propuesta didáctica tenía como objetivo enriquecer la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares formada en los estudiantes. Sin embargo el análisis de resultados de

esta sección se enfoca específicamente en analizar si la propuesta didáctica logró ayudar a los estudiantes a afrontar los siguientes obstáculos de aprendizaje:

- Darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones.
- Identificar y trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ .
- Reconocer que el polo, centro del plano polar, puede tener múltiples representaciones.
- Identificar cuándo una relación entre  $r$  y  $\theta$  es una función en coordenadas polares.

Los estudiantes que realizaron el cuestionario de exploración posterior a la propuesta didáctica fueron 28. De esos 28 alumnos, al menos 20 manifestaron alguna mejora en su comprensión del sistema de coordenadas polares.

#### *5.2.1 Un vistazo a las imágenes conceptuales de los estudiantes y su posible enriquecimiento.*

Como se mencionó en el capítulo anterior, la propuesta didáctica, aparte de los videos y actividades de Desmos y GeoGebra, también incluía un par de preguntas de reflexión y una encuesta. Una de las intenciones de agregar este tipo de actividades en la propuesta didáctica era explorar posibles cambios en la imagen conceptual de manera que a los estudiantes les pareciera más cómoda y “relajada”.

Al observar las respuestas que los alumnos dieron a estas preguntas, y contrastarlas con las respuestas de los cuestionarios, se puede apreciar un enriquecimiento de la imagen conceptual creada en ellos. Mientras que los cuestionarios permiten apreciar que después de aplicar la propuesta didáctica los estudiantes tenían una mayor cantidad de respuestas correctas, es decir apegadas a la definición del concepto, las preguntas de reflexión nos permiten identificar qué parte de su definición personal o de los procesos que realizan fueron los que experimentaron modificaciones.

A continuación se muestran algunas de las respuestas de los estudiantes a las preguntas de reflexión relacionadas con los videos.

- ¿En estos videos viste o escuchaste algo que te pareciera nuevo o que contradijera lo que tú ya sabías?
  - El valor del polo puede determinarse como  $(0, \theta^\circ)$  para cualquier  $\theta$  pero con  $r=0$
  - La forma de encontrar a " $-r$ " (Ubicar el ángulo y caminar para atrás)
  - Un punto en el plano polar, tiene varias coordenadas
- ¿Cambiarías alguna de tus respuestas en el cuestionario? ¿Cuáles?
  - A cada punto del plano le corresponde un único par de coordenadas  $(r, \theta)$  (es Falso).
  - La selección de coordenadas que representan al polo

Figura 31: Respuesta 1 a las preguntas de reflexión relacionadas con los videos.

- ¿En estos videos viste o escuchaste algo que te pareciera nuevo o que contradijera lo que tú ya sabías?
- Sí, en el primer video cuando muestra que tanto las coordenadas  $(0, 0^\circ)$  y  $(0, 90^\circ)$  son pertenecientes al polo, la idea tiene lógica pero las únicas coordenadas que yo pensaba cuando hablaba del polo era  $(0, 0^\circ)$  entonces esto fue nuevo para mí.
- En el segundo video corrige mi idea de que para un punto en el plano le corresponden solo dos coordenadas.
- Para el último video fue nuevo en su totalidad debido a la terminología que no era clara y por lo tanto no sabía hacer una gráfica de una función.
- Después de ver este video, cambiarías alguna de tus respuestas en el cuestionario? ¿Cuál respuesta cambiarías?
- ★ La gráfica de la función que pasa por el polo  
 $r(\theta) = \theta - 30$  Pasa una vez por el polo
- ★ ¿Cuál de las siguientes imágenes muestran la gráfica de una función en coordenadas polares?
- $f(\theta) = 2.5$
- $f(\theta) = 1/9 \theta$

Figura 32: Respuesta 2 a las preguntas de reflexión relacionadas con los videos.

**¿En estos videos viste o escuchaste algo que te pareciera nuevo o que contradijera lo que tú ya sabías?**

Si, es algo raro porque ya sabía que un punto se podía expresar de varias formas en coordenadas polares pero creo que nunca me había entendido bien que no sólo era válido para theta sino también para r. También no había visto como era lo de pasar de una gráfica en coordenadas cartesianas a coordenadas polares, fue muy interesante:D.

Figura 33: Respuesta 3 a las preguntas de reflexión relacionadas con los videos.

A lo largo de este proyecto, como de su práctica docente, la autora ha tratado de sacar provecho de las herramientas didácticas a su alcance. Estas herramientas a veces se ven como imágenes, como videos, como analogías, como actividades lúdicas o como software dinámico. Para la autora la visualización juega un papel muy importante en la enseñanza. Es por esto que en la propuesta didáctica varias de las actividades hacen uso de ella.

La pregunta “¿Por qué crees que estas actividades te ayudaron a mejorar?” formó parte de la encuesta, voluntaria y anónima, aplicada a los estudiantes. Al leer las respuestas, disponibles en la siguiente imagen, se puede apreciar que el uso de la visualización y de las herramientas visuales juega un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes. Tal como mencionó el alumno entrevistado:

“Poder ver las cosas, hace que tomen sentido.”

1) ¿Por qué crees que estas actividades te ayudaron a mejorar?
c Porque ahora ya puedo estar seguro de como se ven ciertas funciones en el plano, puedo ir cambiando ciertas variables y visualizar un sin fin de posibilidades!
e por su explicación y por que ayudan a practicar los conocimientos aprendidos
e Ciertos conceptos que no me quedaron claros se ven mejor en las aplicaciones y videos.
e porque algunas dudas que me surgieron durante el cuestionario pensé que me habían quedado claras, pero al ver los videos pude corregir algunas de mis dudas y errores que tenía
c Me ayudaron a visualizar de mejor manera las funciones en el plano polar y a precisar conceptos vistos en clase.
Mi aprendizaje es tipo visual, me es más fácil entender las cosas si están marcadas con colores o dibujos.
e Para lo práctico, siento que es más interactivo Desmos, al menos a mi gusto. Casi no me gusta usar GeoGebra juntas
Creo que sirven como un complemento a las clases, ya que te ayuda a visualizar lo que significan ciertos conceptos, a parte de que es divertido jugar con los valores y ver como la gráfica cambia conforme estos cambian, lo cual puede ser difícil de imaginar a veces
Porque tal vez lo escuché y lo entendí de una manera pero al momento de ver los videos identificó algunos errores que había tenido al entender el tema, ahora está todo más claro gracias a los ejemplos en los graficadores pero sobre todo en los videos.
c Por que nos muestran de una manera mucho más visual el comportamiento de los números polares
c Las gráficas me ayudaron a ver mejor las gráficas cuando tenemos un $r$ negativo mientras que los videos me ayudaron a darle un mejor sentido y coherencia a mis ideas
Creo que cada recurso de ayuda, tiene diferentes modos de apoyarnos: en el caso de los videos, con la parte teórica, resolución de ejercicios y entender un poco del modo de trabajo; y en el caso de las graficadoras... pues nos muestran El resultado ya aplicado, con la función en Desmos, fue entretenido y ver como evolucionaba la gráfica de esta, entonces en otras funciones será muy útil, también.
Creo que son muy dinámicas y me ayudaron a aterrizar conceptos de pizarrón de forma visual y didáctica, soy mucho de estar en la computadora y definitivamente geogebra es una gran herramienta para jugar con la geometría analítica
La manera en la que lo haré estudiar y aprender mejor es de manera visual, entonces el haber visto videos y repetirlos cuántas veces quisiera para que quedara claro y el uso de gráficas para ver el comportamiento de las funciones y cómo se alteraba si movía alguna variable, me permitió entender de mejor manera este tema.
c Porque es más claro visualizar, y probar la teoría. Que si bien aun no me es del todo claro el cómo se realizan, al menos para visualizarlo y tenerlo presente, son muy claros.
Los videos porque pude comprender aspectos nuevos que podrían ser contraintuitivos a lo que ya sabía, en este caso, que un punto tenga varias coordenadas y que se puedan tener coordenadas con radio negativo, lo cual contrasta mi conocimiento en cartesianas. Me permitieron tener un contraste, además, la posibilidad de pausar y reproducir puede acompañarse a mi proceso interno de asimilación de una idea nueva pero diferente a algo similar -lo que decía de las cartesianas-. Las actividades de Desmos porque sirven como

Figura 34: Algunas respuestas a la pregunta 3 de la encuesta en la propuesta didáctica. Se encuentran encerradas las referencias directas a la visualización por parte de los estudiantes.

Ahora, para continuar con el análisis de resultados de la propuesta didáctica, se abordarán los resultados obtenidos para los obstáculos mencionados al inicio de la sección.

**5.2.2 Sobre darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones y sobre identificar y trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ .**

Dado que la múltiple representación de un punto en coordenadas polares se debe al uso de coordenadas  $r$  y  $\theta$  con valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ , resulta complicado separar ambos obstáculos en el análisis de los resultados. Es por esta razón que se analizaron conjuntamente los resultados de ambos obstáculos.

En la siguiente imagen se pueden apreciar dos comentarios, relacionados a estos obstáculos, que sugieren un enriquecimiento en la imagen conceptual formada en los estudiantes. Mientras que en los recuadros primero, tercero y cuarto se puede apreciar que los estudiantes manifiestan haber agregado piezas de conocimiento, en el segundo recuadro

se puede ver que también, al menos en teoría, se ha corregido una imagen conceptual errónea de la relación entre los puntos del plano polar y sus coordenadas  $(r, \theta)$ .

Two rectangular boxes containing handwritten student responses to reflection questions from video lessons. The top box is for lesson 1 and the bottom box is for lesson 2. Both boxes have a yellow border and are on lined paper.

**Lesson 1 Reflection Questions:**

- ¿En estos videos viste o escuchaste algo que te pareciera nuevo o que contradijera lo que tú ya sabías?
  - El valor del polo puede determinarse como  $(0, \theta^\circ)$  para cualquier  $\theta$  pero con  $r < 0$
  - La forma de encontrar a "-r" (Ubicar el ángulo y caminar para atrás)
  - Un punto en el plano polar, tiene varias coordenadas

¿Cambiarías alguna de tus respuestas en el cuestionario? ¿Cuáles?

- A cada punto del plano le corresponde un único par de coordenadas  $(r, \theta)$  (es Falso)
- La selección de coordenadas que representan al polo

**Lesson 2 Reflection Questions:**

• ¿En estos videos viste o escuchaste algo que te pareciera nuevo o que contradijera lo que tú ya sabías?

- Que los ángulos negativos van en sentido horario
- Que cuando se multiplican coordenadas polares negativas se invierten completamente

• Que un punto el cual le sumamos  $360^\circ$  es el mismo punto

La forma de leer ecuaciones cartesianas son diferentes a las ecuaciones polares

Figura 165: Ejemplos de respuestas de los estudiantes a las preguntas de reflexión que acompañaban a los videos.

Por otro lado, si se quiere hacer uso de los cuestionarios para justificar un enriquecimiento en la imagen conceptual, se puede tomar como ejemplo la siguiente pregunta y sus respuestas.

A cada punto del plano le corresponde UN ÚNICO par de coordenadas  $(r, \theta)$ .

- Verdadero
- Falso

Figura 36: Pregunta 2 de los cuestionarios previo y posterior a la propuesta didáctica.

El enunciado que aparece en esta pregunta es falso. Sin embargo en la exploración previa a la propuesta didáctica ocho de los 28 estudiantes pensaban que era verdadero. Luego de la propuesta didáctica, seis de estos estudiantes fueron capaces de responder mostrando una corrección en la imagen conceptual evocada.

Otra forma de utilizar las respuestas de los cuestionarios para apreciar que los estudiantes mostraron mejoras al afrontar estos obstáculos es notar que en las respuestas a la pregunta 3 de los cuestionarios hubo un cambio muy notorio. El cual fue, que mientras que en la exploración previa a la propuesta didáctica había estudiantes que al punto dado le asociaban una única representación en coordenadas  $(r, \theta)$  al punto dado, este error no se repitió en las respuestas al cuestionario posterior a la propuesta didáctica. Por el contrario, después de la propuesta didáctica los estudiantes hicieron uso de coordenadas polares con valores de  $r$  y  $\theta$  negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ .

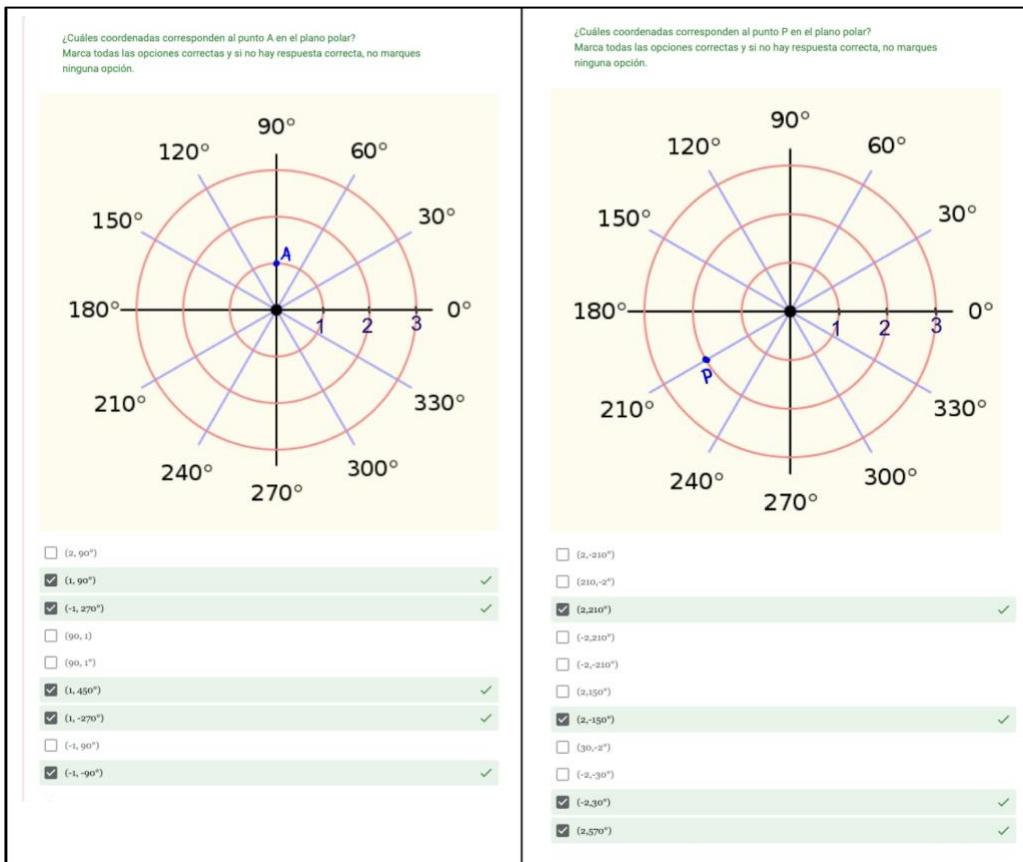


Figura 177: Pregunta 3 de los cuestionarios previo y posterior a la propuesta didáctica.

¿Cuáles coordenadas corresponden al punto A en el plano polar?  
=      ¿Cuáles coordenadas corresponden al punto P en el plano polar?  
Marca todas las opciones correctas y si no hay respuesta correcta.      Marca todas las opciones correctas y si no hay respuesta correcta.

(1, 90°);(-1, 270°);(1, 450°);(1, -270°);(-1, -90°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, 450°);(1, -270°);(-1, 90°);(-1, -90°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, 450°);(1, -270°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 90°)	(2,210°);(-2,-210°);(2,-150°);(2,570°)
(1, 90°);(1, 450°);(1, -270°)	(2,210°);(2,-150°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, -270°);(-1, -90°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, 450°);(1, -270°);(-1, -90°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,-30°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, 450°);(1, -270°);(-1, -90°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(1, 450°)	(2,210°);(2,-150°);(2,570°)
(1, 90°)	(2,210°);(2,-150°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, 450°);(1, -270°);(-1, 90°)	(2,210°);(-2,210°);(2,-150°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, -90°)	(2,210°);(-2,210°);(2,-150°);(2,570°)
(1, 90°);(1, 450°);(1, -270°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, 450°);(1, -270°);(-1, -90°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 270°);(-1, -90°)	(2,210°);(-2,-210°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(1, 450°);(1, -270°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 270°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(1, 450°);(1, -270°)	(2,210°);(2,-150°);(2,570°)
(1, 90°)	(2,210°);(2,-150°);(2,570°)
(1, 90°)	(2,210°);(-2,30°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, 450°);(-1, -90°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, 450°);(1, -270°);(-1, -90°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°);(2,570°)
(1, 90°);(1, -270°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°)
(1, 90°);(1, 450°);(1, -270°);(-1, 90°);(-1, -90°)	(-2,-210°);(-2,-30°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, 450°);(1, -270°);(-1, -90°)	(2,210°);(2,-150°);(2,570°)
(1, 90°);(-1, 270°);(1, -270°);(-1, -90°)	(2,210°);(2,-150°);(-2,30°)
(1, 90°)	(2,210°);(-2,210°);(2,-150°);(2,570°)
(1, 90°)	(2,210°);(2,-150°)

Figura 188: Respuestas individuales a la pregunta 3 de los cuestionarios previo y posterior a la propuesta didáctica.

Cuando en la entrevista se le preguntó al estudiante por esta situación, él respondió: “Fue la primera vez que vi este tema. Estaba acostumbrado al plano cartesiano. Fue luego

de ver los videos (varias veces) y de estar picándole a las aplicaciones que pude entender un poco mejor.”

Al hablar de los obstáculos “darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones” e “identificar y trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ ” parece claro que la propuesta didáctica ha logrado acercar la imagen conceptual de los estudiantes un poco más a la definición del concepto.

### *5.2.3 Sobre reconocer que el polo, centro del plano polar, puede tener múltiples representaciones.*

Al observar las actividades de la propuesta didáctica que abordaban este obstáculo, se puede notar que también servían para abordar el obstáculo de representación múltiple de un punto en coordenadas polares. Sin embargo, los cuestionarios contaban con tres preguntas diseñadas específicamente para abordar este obstáculo evocando la imagen conceptual asociada al polo tres maneras diferentes.

Al responder la pregunta 4, “¿Cuáles coordenadas  $(r, \theta)$  corresponden al polo, origen, en el plano polar?”, de los cuestionarios se tuvo que en el cuestionario previo a la propuesta didáctica 9 estudiantes asociaban al polo únicamente con las coordenadas  $(0,0^\circ)$ . En cambio, para la aplicación del cuestionario posterior a la propuesta didáctica, 6 de estos estudiantes ya eran conscientes de que al polo le corresponden cuales quiera coordenadas  $(r, \theta)$  que tengan el valor de  $r$  igual a 0. En este caso, se podría decir que se logró enriquecer la imagen conceptual, asociada al polo, de esos 6 estudiantes. En la imagen a continuación se muestran comentarios de dos estudiantes que respaldan esta idea.

En estos videos viste o escuchaste algo que te pareciera nuevo o que contradijera lo que tu ya sabias?

Si, en el primer video cuando muestra que tanto las coordenadas  $(0, 0^\circ)$  y  $(0, 90^\circ)$  son pertenecientes al polo, lo cual tiene lógica para las únicas coordenadas que yo pensaba cuando hablaba del polo era  $(0, 0^\circ)$  entonces esto fue nuevo para mi.

Después de ver este video, cambiarías alguna de tus respuestas en el cuestionario?

En caso de que la respuesta sea sí, ¿cuál respuesta cambiarías?

Sí: ¿Cuáles coordenadas  $(r, \theta)$  corresponden al polo, origen, en el plano polar?

Mi respuesta fue  $(0, 0^\circ)$ , sin embargo, según el video, cualquier punto  $r=0$ , corresponderá al origen pues no avanza, por así decir.

Figura 199: Ejemplos de respuestas de los estudiantes a las preguntas de reflexión que acompañaban a los videos.

El caso de la pregunta 5 es tal y como el de la pregunta 3. En las respuestas de los estudiantes a esta pregunta, antes y después de la propuesta didáctica, se puede apreciar que los estudiantes lograron robustecer, de forma correcta, la imagen conceptual que tenían del polo.

<p>Selecciona las coordenadas que representan al polo. Selecciona todas las opciones correctas.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><input checked="" type="checkbox"/> <math>(0, 0^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><input type="checkbox"/> <math>(1, 0^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;"> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><input checked="" type="checkbox"/> <math>(0, 30^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><input type="checkbox"/> <math>(2, 360^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;"> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><input checked="" type="checkbox"/> <math>(0, -120^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;">✓</td> </tr> </table>	<input checked="" type="checkbox"/> $(0, 0^\circ)$	✓	<input type="checkbox"/> $(1, 0^\circ)$		<input checked="" type="checkbox"/> $(0, 30^\circ)$	✓	<input type="checkbox"/> $(2, 360^\circ)$		<input checked="" type="checkbox"/> $(0, -120^\circ)$	✓	<p>Selecciona las coordenadas que representan al polo. Selecciona todas las opciones correctas.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><input checked="" type="checkbox"/> <math>(0, 0^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><input checked="" type="checkbox"/> <math>(0, 310^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><input type="checkbox"/> <math>(3, -360^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;"> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><input type="checkbox"/> <math>(360, 0^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;"> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><input checked="" type="checkbox"/> <math>(0, -120^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><input type="checkbox"/> <math>(-1, 0)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;"> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><input checked="" type="checkbox"/> <math>(0, -12^\circ)</math></td> <td style="width: 20px; text-align: right; padding: 5px;">✓</td> </tr> </table>	<input checked="" type="checkbox"/> $(0, 0^\circ)$	✓	<input checked="" type="checkbox"/> $(0, 310^\circ)$	✓	<input type="checkbox"/> $(3, -360^\circ)$		<input type="checkbox"/> $(360, 0^\circ)$		<input checked="" type="checkbox"/> $(0, -120^\circ)$	✓	<input type="checkbox"/> $(-1, 0)$		<input checked="" type="checkbox"/> $(0, -12^\circ)$	✓
<input checked="" type="checkbox"/> $(0, 0^\circ)$	✓																								
<input type="checkbox"/> $(1, 0^\circ)$																									
<input checked="" type="checkbox"/> $(0, 30^\circ)$	✓																								
<input type="checkbox"/> $(2, 360^\circ)$																									
<input checked="" type="checkbox"/> $(0, -120^\circ)$	✓																								
<input checked="" type="checkbox"/> $(0, 0^\circ)$	✓																								
<input checked="" type="checkbox"/> $(0, 310^\circ)$	✓																								
<input type="checkbox"/> $(3, -360^\circ)$																									
<input type="checkbox"/> $(360, 0^\circ)$																									
<input checked="" type="checkbox"/> $(0, -120^\circ)$	✓																								
<input type="checkbox"/> $(-1, 0)$																									
<input checked="" type="checkbox"/> $(0, -12^\circ)$	✓																								

Figura 40: Pregunta 5 de ambos cuestionarios incluyendo la selección de respuestas correctas.

Selecciona las coordenadas que representan al polo.	Selecciona las coordenadas que representan al polo.
Selecciona todas las opciones correctas.	Selecciona todas las opciones correctas.
(0, 0°);(0, 30°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°)	(0, 0°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(1, 0°);(0, 30°);(2, 360°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(1, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(1, 0°);(2, 360°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°)	(0, 0°);(0, 310°);(3, -360°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)
(0, 0°);(0, 30°);(0, -120°)	(0, 0°);(0, 310°);(0, -120°);(0,-12°)

Figura 20: Muestra de respuestas a la pregunta 5 de los cuestionarios.

5.2.5 Sobre identificar cuándo una relación entre  $r$  y  $\theta$  es una función en coordenadas polares.

Para abordar este obstáculo, se contaba con dos herramientas dentro de la propuesta didáctica:

- Un video que explica el método de graficación de funciones en coordenadas polares que consiste en “convertir” la gráfica del plano cartesiano a coordenadas polares enrollando la gráfica alrededor del polo.
- Una actividad de Desmos que permite ver la gráfica de diferentes funciones en coordenadas polares.

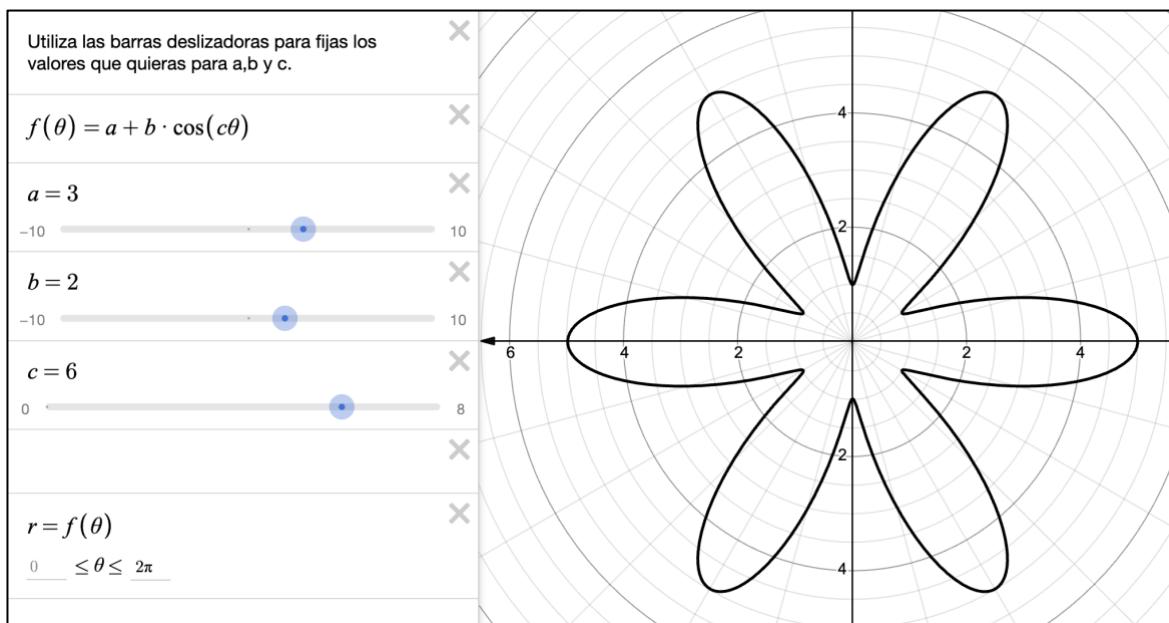


Figura 42: Captura de pantalla de la actividad para graficar funciones en coordenadas polares.

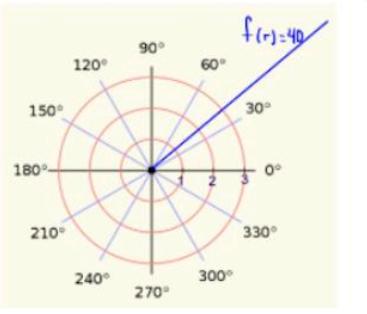
Es posible pensar que dichas actividades tengan como objetivo que los alumnos aprendan a graficar funciones en el sistema de coordenadas polares. Pero aunque muy probablemente las actividades sirvan para eso, también sirven para que los alumnos creen cierta familiaridad con las gráficas de funciones en coordenadas polares y así puedan ver y entender lo que las hace diferentes a las gráficas de funciones en el plano cartesiano.

En los cuestionarios, la pregunta 7 era la enfocada en evocar la imagen conceptual asociada a las gráficas de funciones en coordenadas polares. En ambas aplicaciones de los cuestionarios esta fue la pregunta que representó mayor reto para los estudiantes. Mientras que en la aplicación previa a la propuesta didáctica solamente 7 estudiantes respondieron

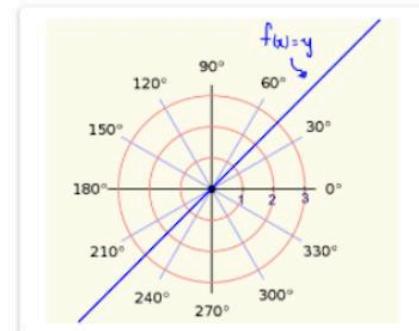
correctamente, en la aplicación posterior la cantidad de estudiantes dando la respuesta correcta casi se duplicó. Ahora 15 estudiantes fueron capaces de llegar a la respuesta correcta. Esto muestra que, aunque en varios estudiantes, se logró que la imagen conceptual evocada se enriqueciera hasta lograr una respuesta correcta. En otros varios estudiantes su imagen conceptual evocada sigue siendo muy limitada.

¿Cuál, o cuáles, de las siguientes imágenes muestran la gráfica de una función en coordenadas polares?

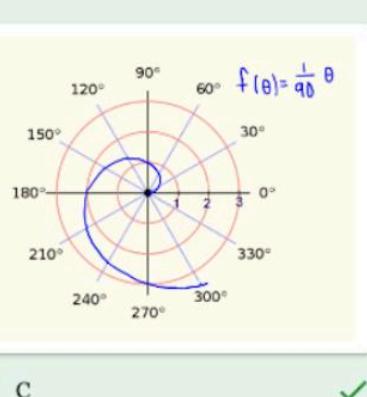
Selecciona todas las opciones correctas.



A

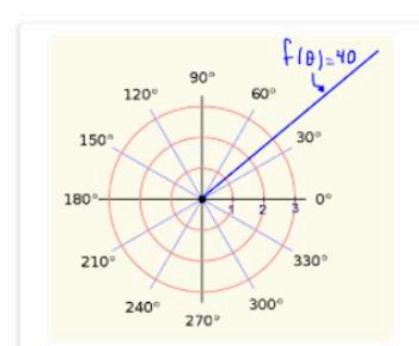


B



C

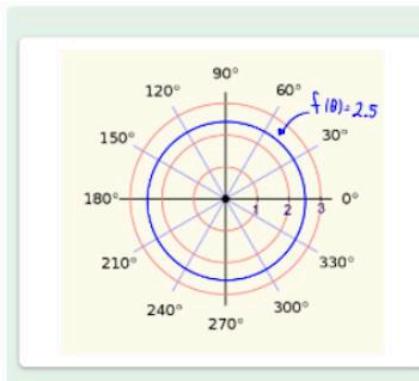
✓



D



E



F

✓

Figura 213: Pregunta 7 de ambos cuestionarios mostrando las respuestas correctas.

El estudiante entrevistado fue uno de los ocho que logró llegar a la respuesta correcta en el cuestionario posterior a la implementación de la propuesta didáctica. Cuando se le

preguntó cómo lo había logrado, su respuesta fue: “estuve jugando mucho con la actividad de Desmos y también intenté ver otras funciones en coordenadas polares usando la aplicación Mathematica”. También mencionó que “estar viendo tantas gráficas lo ayudó, no sólo a diferenciar las gráficas de funciones en coordenadas polares sino a saber cómo deberían verse los lugares geométricos representados por las ecuaciones en las posibles respuestas”.

### **5.3. Conclusión del capítulo**

En la sección 5.1 se abordaron los resultados de la primera exploración de la imagen conceptual formada luego de abordar el tema de coordenadas polares en clase. Esta exploración mostró gran coincidencia con los obstáculos encontrados durante la revisión bibliográfica.

Por otro lado, en la sección 5.2 se abordaron los resultados de la implementación de la propuesta didáctica. Dichos resultados dejaron ver que en más de una vez fue posible enriquecer la imagen conceptual de los estudiantes.

A lo largo de este capítulo (no sólo en el documento, sino en la práctica) fue claro que la propuesta didáctica fue de provecho tanto para los alumnos como para la autora. Mientras se iban usando los videos, las actividades, los cuestionarios y las encuestas iba siendo claro que varios alumnos se beneficiaban de dichos materiales. Esto se reflejaba algunas veces en el cambio en las respuestas de los estudiantes (antes y después de usar algunos de los materiales) y otras veces en sus reacciones inmediatas. Por ejemplo, exclamaciones en clase, preguntas y comentarios al final de la clase o incluso correos que la autora recibió de sus alumnos para hacer mención de cosas que habían notado en las actividades y que les causaron asombro o que simplemente les gustaron.

Al diseñar y crear los videos explicativos y las actividades en software dinámico del sistema de coordenadas polares la autora tomó en cuenta tanto aspectos de su experiencia docente como de los hallazgos en la literatura. Un factor importante para la autora era que el material estuviera disponible para que los estudiantes lo aprovecharan en cualquier momento. Era importante que los estudiantes fueran capaces tanto de “poner atención” en clase como

de tener material que les dijera qué se vio en clase y les permitiera repasar y experimentar con lo visto (o aprendido) en clase. Esto tomando en cuenta que tenía alumnos que tomaban la clase de forma sincrónica pero también que tenía alumnos que consumían el contenido de la clase de forma asíncrona. Una agradable sorpresa para la autora fue darse cuenta de que varios de sus estudiantes utilizaban los videos y las actividades más de una vez. Que aprovechaban la disponibilidad de recursos para verlos, pausarlos y repetirlos de acuerdo a sus necesidades.

# CAPÍTULO 6

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### 6.0. Introducción al capítulo

En este capítulo se presenta un análisis de los hallazgos obtenidos en relación con la pregunta de investigación y las preguntas auxiliares planteadas. En primer lugar, se aborda cómo los resultados responden a los objetivos iniciales del estudio, proporcionando una interpretación de estos. Posteriormente, se destaca la importancia de la visualización y el uso de la tecnología como herramientas clave para enriquecer la imagen conceptual formada en los estudiantes. Finalmente, se discuten las limitaciones del estudio y se proponen direcciones para futuras investigaciones, reconociendo los desafíos enfrentados y las oportunidades para ampliar la investigación en este campo.

### 6.1. Respuesta a la pregunta de investigación y a las preguntas auxiliares

Este proyecto de doctorado fue guiado por la pregunta de investigación “¿Es posible enriquecer la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares que se forma en los estudiantes que transitan por una instrucción matemática ordinaria? De ser así, ¿cómo?”. Esta pregunta tiene asociadas otras cuatro preguntas auxiliares.

Las primeras dos preguntas auxiliares “¿Cuáles son los obstáculos de aprendizaje asociados con el sistema de coordenadas polares que se han identificado en la literatura especializada y de qué tipo son?” y “¿Cuáles son las propuestas didácticas relacionadas con el sistema de coordenadas polares que se han planteado en la literatura especializada?” se respondieron durante la revisión bibliográfica. Los obstáculos de aprendizaje asociados con el sistema de coordenadas polares son los siguientes:

- Darse cuenta de que un punto en el sistema de coordenadas polares tiene múltiples representaciones.

- Identificar y trazar puntos  $(r, \theta)$  en el plano de coordenadas polares cuando  $r$  y  $\theta$  tienen valores negativos o con  $\theta$  mayor que  $360^\circ$ .
- Reconocer que el polo, centro del plano polar, puede tener múltiples representaciones.
- Hallar los puntos de intersección de las gráficas de dos funciones en el plano polar.
- Identificar cuando una relación entre  $r$  y  $\theta$  es una función en coordenadas polares.
- Graficar funciones en coordenadas polares.
- Convertir coordenadas cartesianas en coordenadas polares.

Para dar respuesta a la segunda pregunta auxiliar, en la sección 2.2.2 se habló de las propuestas didácticas encontradas en la literatura. Sin embargo, se pueden encontrar respuestas más robustas a estas dos preguntas en Haro y Aguilar (2024), el cual es un artículo de investigación que resultó de la revisión bibliográfica que dio respuesta a las dos primeras preguntas auxiliares.

Sin embargo, una respuesta sucinta a esta segunda pregunta es que se encontraron 2 propuestas didácticas para introducir el concepto de coordenadas polares y que se encontraron varias propuestas didácticas para lidiar con 3 de los obstáculos de aprendizaje reportados en la literatura. Siendo estos:

- Graficación de funciones en el plano polar.
- Encontrar puntos de intersección entre dos gráficas de funciones polares.
- Múltiples representaciones de un punto en el plano polar.

Las propuestas didácticas encontradas hacen uso tanto de analogías como de herramientas que permiten la visualización; tales como calculadoras gráficas o software que permite la graficación estática o dinámica de la ubicación de puntos y de gráficas de funciones en coordenadas polares.

La tercera pregunta auxiliar de este proyecto “¿Cuál es la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares que se forma en los estudiantes luego de abordar este

tema en clase?” se respondió gracias a la exploración inicial que tuvo lugar en la etapa descrita en la sección 4.1.1 y cuyos resultados se muestran a lo largo de la sección 5.1. Algunas observaciones relevantes que se obtuvieron durante esta etapa fueron las siguientes:

- En varios casos, las imágenes conceptuales evocadas, asociadas al polo resultaron ser contradictorias entre sí. Por ejemplo, hubo varios estudiantes que afirmaron que para cualquier  $\theta$ , las coordenadas  $(0, \theta)$  representan el polo. Sin embargo, algunos de esos mismos estudiantes no reconocen las coordenadas  $(0, 30^\circ)$  como representación del polo.
- En la selección de ejemplos y contraejemplos para gráficas de funciones en coordenadas polares la mayor parte de los estudiantes comete errores tanto de llamar ejemplo a objetos que no coinciden con la definición del concepto (tipo Mis-in), como de no llamar ejemplo a objetos que sí la cumplen (tipo Missing).
- Algunos errores al convertir coordenadas cartesianas a polares pueden deberse a que, para calcular el ángulo  $\theta$ , los estudiantes simplemente usan la fórmula sin poner en duda el resultado obtenido. Los alumnos sugieren graficar el punto  $(x, y)$  que quieren convertir y el resultado  $(r, \theta)$  obtenido al convertir para verificar si las ubicaciones de ambos puntos coinciden.
- A los estudiantes les parece muy complicado graficar funciones en coordenadas polares.
- Discordancia con los procesos a seguir y los resultados de “seguir” el proceso al ubicar puntos con coordenada  $r$  negativa.
- A los estudiantes les cuesta entender que un punto puede tener muchas representaciones en coordenadas  $(r, \theta)$  que se derivan de la posibilidad de variar la coordenada radial entre  $r$  y  $-r$  y de sumar a la coordenada angular múltiplos enteros de  $360^\circ$ .

La cuarta pregunta auxiliar “¿Es posible que los estudiantes enriquezcan la imagen conceptual formada con ayuda de una propuesta didáctica basada en herramientas que permitan la visualización?” se respondió durante el análisis de

resultados de la propuesta didáctica en la sección 5.2. Aquí se pudo apreciar en repetidas ocasiones que el uso de videos, ejemplos de gráficas y de software dinámico permitió que imágenes conceptuales evocadas que en un principio eran erróneas, se acercaran o coincidieran con la definición del concepto. Incluso, durante la encuesta los estudiantes manifestaron lo beneficioso que les resulta poder visualizar muchos ejemplos. Lo cual responde, afirmativamente, a la pregunta auxiliar.

El proceso de buscar respuesta para las preguntas auxiliares permitió dar respuesta a la pregunta de investigación diciendo que sí es posible enriquecer la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares que se forma en los estudiantes. En lo que respecta a la pregunta ¿cómo?, los resultados de esta investigación muestran que “con el uso de la visualización” es una respuesta al “¿cómo?” que aparece en la pregunta de investigación.

## **6.2. Importancia de la visualización y el uso de la tecnología**

Recién se mencionó que el uso de la visualización permitió el enriquecimiento de la imagen conceptual formada en los estudiantes. Esto se vio reflejado en varios momentos tanto de la implementación como en el análisis de resultados. Desde escuchar exclamaciones de impresión o sorpresa al mostrarles la actividad que muestra la ubicación puntos con coordenadas  $(r, \theta)$  con valores negativos o al mostrarles las gráficas de algunas funciones en coordenadas polares, hasta situaciones más complejas como las que se plantean a continuación.

Para mencionar un par de situaciones en las que se puede enriquecer la imagen conceptual asociada el sistema se coordenadas polares se debe recordar que la imagen conceptual también está constituida por procesos. En la sección 5.1.6 las respuestas de los estudiantes entrevistados sugieren que se podría enriquecer la imagen conceptual de gráfica de una función en coordenadas polares al “agregar” o familiarizarlos con el método de enrollar la gráfica del plano cartesiano alrededor el polo, también podría ayudar darles los suficientes ejemplos (que muestren cómo se

ven) de gráficas de funciones en el plano polar para que puedan crear algo de “intuición” de cómo se podría ver la gráfica de cierta función.

Otro proceso que se vale de la visualización y que podría enriquecer la imagen conceptual de los estudiantes es agregar la “verificación” como último paso en el proceso de convertir coordenadas cartesianas a polares. Esto consistiría en ubicar el punto  $(x, y)$  que quieren convertir y también ubicar el punto  $(r, \theta)$  que obtuvieron como resultado y asegurándose de que ambos puntos coinciden. Para realizar esta “verificación” los estudiantes pueden ubicar ellos mismos los puntos  $(x, y)$  y los puntos  $(r, \theta)$ , aunque también sería válido usar alguna de las actividades de Geogebra para hacer dicha “verificación”, pues lo que parece causar impacto en ellos y les hace notar la veracidad o la falsedad del resultado de su conversión de coordenadas es poder ver que el punto en coordenadas  $(x, y)$  comparte la ubicación del punto con coordenadas  $(r, \theta)$ .

En opinión de la autora, el uso conjunto de preguntas de reflexión y de la posibilidad de corregir respuestas erróneas echando mano de herramientas que permiten la visualización de ejemplos fue de gran provecho en el proceso de creación y enriquecimiento de la imagen conceptual. Primero, en el proceso de creación para que los estudiantes tuvieran un punto de partida en el que les fuera posible de ver y entender cómo es que cierto objeto es un ejemplo que cumple la definición el concepto. Posteriormente, en el proceso de enriquecimiento de la imagen conceptual, al proveer a los estudiantes con herramientas visuales que les permitieron verificar, y de ser necesario corregir, sus respuestas luego de haberse enfrentado con algún obstáculo epistemológico o didáctico.

### **6.3. Limitantes del estudio y futuras investigaciones**

Dado que del sistema de coordenadas polares se forma de varios conceptos (ver figura 2) en esta investigación fue imposible estudiar a profundidad varios de ellos. Además de esto, es probable que haya elementos del análisis que pudieran estudiarse con mayor detenimiento o bajo diferentes teorías del aprendizaje.

Si se quisiera continuar con la investigación del proceso de enseñanza y aprendizaje del sistema de coordenadas polares se podría tomar uno de los conceptos y ver cómo influye en la comprensión de los otros conceptos con los que se relaciona. También podría valer la pena investigar dónde se originan los obstáculos de aprendizaje, así como la pertinencia de que el primer encuentro con las coordenadas polares sea en universidad y no en una etapa más temprana. Pensando que para ubicar puntos en el sistema de coordenadas polares se requieren únicamente la distancia y el ángulo y que ambos son conceptos que se ven en educación básica, ¿por qué suele esperarse hasta la educación superior para presentar el sistema de coordenadas polares?

Otras preguntas que podrían continuar esta investigación serían ¿de qué otras maneras se puede enriquecer la imagen conceptual del sistema de coordenadas polares que se forma en los estudiantes?, o bien, ¿cuáles son los resultados de implementar las propuestas didácticas encontradas durante la revisión bibliográfica? Se podría hacer investigación con el objetivo de lidiar con los obstáculos reportados en la literatura y que siguen sin ser atendidos. Otro posible camino, tal y como se había mencionado anteriormente, sería hacer investigación implementando y reportando resultados de realizar las actividades de las propuestas didácticas existentes.

Como se dijo al inicio de este escrito, el sistema de coordenadas polares se enseña en muchos programas de licenciatura y además tiene varias aplicaciones en el mundo. Así que vale la pena seguir investigando como se puede lograr mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de este tema.

## REFERENCIAS

- Ahl, D. (1981). Computer games in mathematics education. *The Mathematics Teacher*, 74(8), 653–656. <https://doi.org/10.5951/MT.74.8.0653>
- Allinger, G. D. (1983). The 10-minute mathematics bulletin board. *The Mathematics Teacher*, 76(6), 400–406. <https://doi.org/10.5951/MT.76.6.0400>
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Arilin's Math World. (s.f.) Geometría Analítica. <https://sites.google.com/view/arilinsmathworld/cursos/geometr%C3%A3%ADtica-1>
- Bordón, J. D. R., Aznárez, J. J., & Maeso, O. (2019). Numerical integration scheme for singular integrals based on polar coordinates free from angular quasi-singularities. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 103, 126–136. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.03.010>
- Borji, V., Erfani, H., & Font, V. (2020). A combined application of APOS and OSA to explore undergraduate students' understanding of polar coordinates. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(3), 405-423. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1578904>
- Borji, V., & Voskoglou, M. G. (2017). Designing an ACE approach for teaching the polar coordinates. *American Journal of Educational Research*, 5(3), 303–309.
- Camp, D. R. (1995). Sharing teaching ideas: Starship. *The Mathematics Teacher*, 88(2), 113– 115. <https://doi.org/10.5951/MT.88.2.0113>
- Dick, T. P. (2008). Keeping the faith: Fidelity in technological tools for mathematics education. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the*

*teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives* (pp. 333–339).  
Information Age Publishing

Edwards, M. T., & Reinhardt, J. A. (2008). Are you connected? Fostering exploration with unexpected graphs. *The Mathematics Teacher*, 101(6), 412–417.  
<https://doi.org/10.5951/MT.101.6.0412>

Esty, W. W. (1991). Finding points of intersection of polar-coordinate graphs. *The Mathematics Teacher*, 84(6), 472–477. <https://doi.org/10.5951/MT.84.6.0472>

Germain-McCarthy, Y. (1994). Demystifying polar graphing. *The Mathematics Teacher*, 87(9), 728–735. <https://doi.org/10.5951/MT.87.9.0728>

Giraldo, V., Tall, D., & Mariano Carvalho, L. (2003). Using theoretical-computational conflicts to enrich the concept image of derivative. *Research in Mathematics Education*, 5(1), 63–78. <https://doi.org/10.1080/14794800008520115>

Habre, S. (2017). Students' challenges with polar functions: Covariational reasoning and plotting in the polar coordinate system. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(1), 48–66.  
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1220027>

Haro, A. & Aguilar, M. S. (2023). Learning obstacles and teaching proposals associated with the polar coordinate system: A literature review. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.  
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2295903>

Jankvist, U. T., & Niss, M. (2015). A framework for designing a research-based “maths counsellor” teacher programme. *Educational Studies in Mathematics*, 90(3), 259–284. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9629-8>

Kim, H., Park, Y., & Bae, J. (2020). Optimized design of a body-powered finger prosthesis using fingertip trajectories based on polar coordinate analysis. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 34(1), 387–399. <https://doi.org/10.1007/s12206-019-1238-5>

- Kroon, C. (2014). Arctic search and destroy. *The Mathematics Teacher*, 108(1), 80–80.  
<https://doi.org/10.5951/mathteacher.108.1.0080>
- Liu, L., Guo, R., Ji, J., Miao, Z., & Zhou, J. (2020). Practical consensus tracking control of multiple nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(10), 3831–3847.  
<https://doi.org/10.1002/rnc.4967>
- Lowther, M. (1999). Polar valentine. *The Mathematics Teacher*, 92(2), 86–86.
- Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2014). Complexities in students' construction of the polar coordinate system. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 135–149.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.10.001>
- Montiel, M., Vidakovic, D., & Kabael, T. (2008). Relationship between students' understanding of functions in Cartesian and polar coordinate systems. *Investigations in Mathematics Learning*, 1(2), 52–70.  
<https://doi.org/10.1080/24727466.2008.11790283>
- Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D., & Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 139–160. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9184-2>
- Phan-Yamada, T., & Yamada III, W. M. (2012). Exploring polar curves with GeoGebra. *The Mathematics Teacher*, 106(3), 228–233.  
<https://doi.org/10.5951/mathteacher.106.3.0228>
- Presmeg, N. (2020). Visualization and Learning in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (2nd ed., pp. 900–904). Springer.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0\\_161](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_161)

- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Tirosh, D., & Tsamir, P. (2022). Missing and Mis-in Concept Images of Parallelograms: the Case of Tal. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(5), 981–997. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10175-0>
- Ulusoy, F. (2021). Prospective Early Childhood and Elementary School Mathematics Teachers' Concept Images and Concept Definitions of Triangles. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(5), 1057–1078. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10105-6>
- Van Garderen, D. (2006). Spatial Visualization, Visual Imagery, and Mathematical Problem Solving of Students With Varying Abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39(6), 496–506. <https://doi.org/10.1177/00222194060390060201>
- Walker, J. M. (2007). Where have all the flowers gone? *The Mathematics Teacher*, 101(2), 88–92. <https://doi.org/10.5951/MT.101.2.0088>
- Walton, K. D., & Walton, J. D. (1987). Computer-assisted polar graphing. *The Mathematics Teacher*, 80(3), 246–250. <https://doi.org/10.5951/MT.80.3.0246>
- Zengin, Y., & Tatar, E. (2015). The teaching of polar coordinates with dynamic mathematics software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(1), 127–139. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.904529>
- Zhang, X., Clements, M. A., & Ellerton, N. F. (2014). Enriching student concept images: Teaching and learning fractions through a multiple-embodiment approach. *Mathematics Education Research Journal*, 27(2), 201–231. <https://doi.org/10.1007/s13394-014-0137-4>

## ANEXOS

### Apéndice 1. Material creado

#### Material creado. Videos explicativos del tema

Haro, A. [Arlin's Math World] (2021, Junio 3) Coordenadas polares [Video]. YouTube.

<https://youtu.be/UMHSwkpJn4o>

Haro, A. [Arlin's Math World] (2021, Junio 7) Lugares Geométricos en el plano polar [Video]. YouTube.

<https://youtu.be/HbjP0jO3blM>

Haro, A. [Arlin's Math World] (2021, Junio 17) Cambio de coordenadas de polares a cartesianas [Video]. YouTube.

<https://youtu.be/ZojNn8IvKoo>

Haro, A. [Arlin's Math World] (2021, Junio 18) Convertir de Coordenadas Cartesianas a Coordenadas Polares [Video]. YouTube.

<https://youtu.be/1Ws0wanE2z8>

Haro, A. [Arlin's Math World] (2021, Junio 22) Graficar funciones en coordenadas polares [Video]. YouTube.

<https://youtu.be/nzs4b9M2EDo>

#### Material creado: Actividades con software dinámico

Haro, A. (s.f.) Coordenadas polares, ¿con valor de r negativo? [GeoGebra animación]

<https://www.GeoGebra.org/m/wepzgmbq>

Haro, A. (s.f.) Coordenadas Polares. Variar valores de r y theta [GeoGebra animación]

<https://www.GeoGebra.org/m/zq9ybzhb>

Haro, A. (s.f.) Coordenadas polares. Cambio en r [GeoGebra animación]  
<https://www.GeoGebra.org/m/vswcbbc>

Haro, A. (s.f.) Graficación en coordenadas polares [Desmos animación]  
<https://www.desmos.com/calculator/yxphevpwze>

**Material creado: Videos hechos especialmente para enfrentar obstáculos de aprendizaje identificados**

Haro, A. [Arlin's Math World] (2021, Junio 5) Coordenadas Polares: El origen, radio negativo y ángulo negativo [Video]. YouTube.  
<https://youtu.be/IH3zRBGPHCA>

Haro, A. [Arlin's Math World] (2021, Junio 9) ¿Un punto con muchas coordenadas? [Video]. YouTube.  
<https://youtu.be/Iz0XIEJ7heg>

Haro, A. [Arlin's Math World] (2021, Junio 23) Graficar funciones en coordenadas polares: otro método [Video]. YouTube.  
<https://youtu.be/rwduBc7s2Qk>

## **Apéndice 2. Artículos en los que se basa la revisión bibliográfica**

### **Artículos ubicados en revistas de investigación en educación matemática**

*Educational Studies in Mathematics* (1 artículo)

Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D., & Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 139–160. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9184-2>

*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (3 artículos)

Borji, V., Erfani, H., & Font, V. (2020). A combined application of APOS and OSA to explore undergraduate students' understanding of polar coordinates. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(3), 405–423. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1578904>

Habre, S. (2017). Students' challenges with polar functions: Covariational reasoning and plotting in the polar coordinate system. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(1), 48–66. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1220027>

Zengin, Y., & Tatar, E. (2015). The teaching of polar coordinates with dynamic mathematics software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(1), 127–139. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.904529>

*The Journal of Mathematical Behavior* (2 artículos)

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2014). Complexities in students' construction of the polar coordinate system. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 135–149. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.10.001>

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2014). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 461–473. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.002>

## Artículos ubicados en revistas de profesionales de la educación matemática

### *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12* (2 artículos)

Harrow, C., & Merchant, N. (2020). Envelope curves unify sinusoidal graphing. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 113(4), 301–308.  
<https://doi.org/10.5951/MTLT.2019.0129>

Lee, H. Y. (2020). Tell me where they are. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 113(11), 78–84. <https://doi.org/10.5951/MTLT.2019.0125>

### *The Mathematics Teacher* (15 artículos)

Ahl, D. (1981). Computer games in mathematics education. *The Mathematics Teacher*, 74(8), 653–656. <https://doi.org/10.5951/MT.74.8.0653>

Allinger, G. D. (1983). The 10-minute mathematics bulletin board. *The Mathematics Teacher*, 76(6), 400–406. <https://doi.org/10.5951/MT.76.6.0400>

Camp, D. R. (1995). Sharing teaching ideas: Starship. *The Mathematics Teacher*, 88(2), 113–115. <https://doi.org/10.5951/MT.88.2.0113>

Denson, P. (1995). Trigonometric polar graphs. *The Mathematics Teacher*, 88(8), 722–723.

Edwards, M. T., & Reinhardt, J. A. (2008). Are you connected? Fostering exploration with unexpected graphs. *The Mathematics Teacher*, 101(6), 412–417.  
<https://doi.org/10.5951/MT.101.6.0412>

Esty, W. W. (1991). Finding points of intersection of polar-coordinate graphs. *The Mathematics Teacher*, 84(6), 472–477. <https://doi.org/10.5951/MT.84.6.0472>

Esty, W. W. (1993). Illustrate further. *The Mathematics Teacher*, 86(3), 195–195.

Germain-McCarthy, Y. (1994). Demystifying polar graphing. *The Mathematics Teacher*, 87(9), 728–735. <https://doi.org/10.5951/MT.87.9.0728>

Kroon, C. (2014). Arctic search and destroy. *The Mathematics Teacher*, 108(1), 80–80.

<https://doi.org/10.5951/mathteacher.108.1.0080>

Lawes, J. F. (2013). Graphing polar curves. *The Mathematics Teacher*, 106(9), 660–667.

<https://doi.org/10.5951/mathteacher.106.9.0660>

Lowther, M. (1999). Polar valentine. *The Mathematics Teacher*, 92(2), 86–86.

Phan-Yamada, T., & Yamada III, W. M. (2012). Exploring polar curves with GeoGebra.

*The Mathematics Teacher*, 106(3), 228–233.

<https://doi.org/10.5951/mathteacher.106.3.0228>

Wagner, W. J. (1982). Circles, polar graphs, and a computer—some unexpected results.

*The Mathematics Teacher*, 75(4), 323–328. <https://doi.org/10.5951/MT.75.4.0323>

Walker, J. M. (2007). Where have all the flowers gone? *The Mathematics Teacher*, 101(2), 88–92. <https://doi.org/10.5951/MT.101.2.0088>

Walton, K. D., & Walton, J. D. (1987). Computer-assisted polar graphing. *The Mathematics Teacher*, 80(3), 246–250. <https://doi.org/10.5951/MT.80.3.0246>

### **Artículos adicionales encontrados en las referencias bibliográficas de los 23 trabajos ubicados inicialmente**

- Citados en Borji et al., 2020

Borji, V., & Voskoglou, M. G. (2017). Designing an ACE approach for teaching the polar coordinates. *American Journal of Educational Research*, 5(3), 303–309.

Borji, V., & Voskoglou, M. G. (2017). Applying the APOS theory to study the student understanding of the polar coordinates. *American Journal of Educational Research*, 4(16), 1149–1156.

- Citado en Zengin and Tatar, 2015

Ersoy, M. (2008). Computer aided math instruction: Taking polar coordinates within Mathematica activities. In E. Altun E, M. M. İnceoğlu, Camp; E. Ateş (Eds.), *Proceedings of the Second International Computer Camp; Instructional Technologies Symposium* (pp.93–198). Ege University.

- Citado en Montiel et al., 2009

Montiel, M., Vidakovic, D., & Kabael, T. (2008). Relationship between students' understanding of functions in Cartesian and polar coordinate systems. *Investigations in Mathematics Learning*, 1(2), 52–70.

<https://doi.org/10.1080/24727466.2008.11790283>