Capítulo 2
Hallazgos sólidos de la investigación en Educación Matemática: características, ejemplos y posible implementación

Mario Sánchez Aguilar[1]
Instituto Politécnico Nacional (México)

Resumen

Este es un escrito de divulgación cuyo propósito principal es difundir la iniciativa denominada *Solid Findings in Mathematics Education*, la cual tiene la intención de identificar y comunicar hallazgos sólidos de investigación que provienen de investigaciones confiables y rigurosas, y que pueden ser aplicados a circunstancias o dominios distintos de aquellos en los que se encontraron. En el escrito se ilustran tres de esos hallazgos sólidos: (1) razonamiento matemático e imagen del concepto, (2) esquemas empíricos de demostración, y (3) el contrato didáctico en matemáticas. El escrito finaliza con una reflexión sobre la implementación de resultados de investigación en educación matemática.

Palabras clave: hallazgos sólidos de investigación; generalización de resultados de investigación; implementación de resultados de investigación.

Introducción

Hay una frase atribuida a Henry Pollak, "no existen los teoremas en educación matemática". Esa frase captura una de las características de muchos resultados de investigación producidos en el campo de la educación matemática: dependen mucho del contexto donde se obtienen, y por lo tanto

[1] Correo-e: masanchez@ipn.mx

su generalización es limitada. En el campo de la educación matemática no se tiene la certeza que se obtiene en el campo de las matemáticas cuando un resultado o una afirmación es formalmente demostrada. El "2 + 2 = 4 aquí y en China" no se cumple para la educación matemática: una aproximación didáctica que es exitosa en la capital de Japón, puede no serlo en la Sierra Norte de Puebla en México. Sin embargo, existen resultados de investigación que han sido obtenidos de manera sistemática y que se han identificado o se cumplen más allá de los contextos en los que originalmente fueron reconocidos, es decir, gozan de cierto grado de generalización.

El presente es un escrito de divulgación, y uno de sus propósitos es difundir una iniciativa educativa enfocada en identificar y dar a conocer resultados de investigación calificados como "sólidos" por ser generalizables hasta cierto punto, pero también por poseer otras características —las cuales se verán más adelante— que incrementan su validez y confiabilidad. Se comienza describiendo la iniciativa educativa antes mencionada y lo que se entiende dentro de ella como un *hallazgo sólido en educación matemática*; posteriormente se proporcionan algunos ejemplos de hallazgos sólidos, y se concluye con una reflexión sobre el futuro del campo educación matemática con respecto a la implementación de resultados de investigación sólidos.

La iniciativa "hallazgos sólidos en educación matemática"

En el año 2011 el *Comité Educativo de la Sociedad Matemática Europea* inició la publicación de una colección de artículos denominada *Solid Findings in Mathematics Education*. Estos artículos —once hasta el momento— han sido publicados en el Boletín de la Sociedad Matemática Europea y en la página web del Comité Educativo de la Sociedad Matemática Europea. El propósito de esta colección de artículos es divulgar, entre matemáticos y otros académicos interesados en la investigación en educación matemática, síntesis de investigaciones sobre distintos tópicos de importancia. Cada artículo —excepto el primero— resume algún hallazgo sólido que la investigación en educación matemática ha producido sobre el tópico tratado. Hasta el momento se han publicado un documento introductorio a la colección, y diez artículos con hallazgos sólidos sobre los siguientes tópicos:

1. Demostraciones matemáticas.
2. Conocimiento y desarrollo de los profesores de matemáticas.
3. El contrato didáctico entre estudiantes y profesores de matemáticas.
4. Modelos y modelación matemática.
5. Creencias y orientaciones.
6. Normas sociomatemáticas.
7. Actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas.
8. La transición de la educación matemática secundaria a la terciaria.
9. Uso de la tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
10. Imágenes conceptuales en el razonamiento matemático de los estudiantes.

En este capítulo se ilustran algunos de los hallazgos sólidos que han sido publicados hasta el momento, sin embargo, se recomienda al lector que recurra a leer los artículos originales, los cuales son de libre acceso, y además algunos de ellos son muy interesantes e instructivos. Una manera de acceder a ellos es a través de la página web del Comité Educativo de la Sociedad Matemática Europea:
http://www.euro-math-soc.eu/ems_education/education_homepage.html

¿Qué es un hallazgo sólido?

En el primer artículo de la colección (Education Committee of the European Mathematics Society, 2011a) se discute qué se entiende por un *hallazgo sólido*. Ahí se declara que para determinar lo que es un hallazgo sólido, se adoptaron los criterios propuestos por Schoenfeld (2007) para analizar la calidad de una investigación. Según Schoenfeld, una investigación debe ser juzgada por la confiabilidad de sus resultados, su generalidad, y la importancia de su contribución a la teoría y la práctica de la educación matemática. Con base en lo anterior, en esta colección de artículos un hallazgo sólido se refiere a resultados de investigación que:

1. Provienen de una investigación confiable y disciplinada; una investigación que es fuerte y convincente al momento de clarificar las preguntas que se plantea.

2. Son generalmente reconocidos como contribuciones importantes que han influenciado o pueden influir de manera significativa el campo de investigación.
3. Pueden ser aplicados a circunstancias o dominios distintos de aquellos en los que se desarrolló la investigación.
4. Pueden ser resumidos de una manera breve y comprensiva para las personas no especialistas, pero interesadas en el tema.

Como se menciona en este primer artículo de la colección, el mensaje general de los hallazgos sólidos no es que la investigación en educación matemática ha producido explicaciones incuestionables y soluciones directas a los fenómenos educativos. Más bien, el mensaje es que la educación matemática es compleja, y que la comunidad de educadores y educadoras matemáticas ha hecho un esfuerzo serio por identificar esta complejidad, entender su impacto, y sugerir soluciones potenciales (Education Committee of the European Mathematics Society, 2011a, p. 46).

Enseguida se ilustran algunos de los hallazgos sólidos que han sido incluidos en la colección de artículos antes mencionada.

Hallazgo sólido 1: Razonamiento matemático e imagen del concepto

El primer hallazgo sólido al que se hará referencia en este capítulo se encuentra publicado en Education Committee of the European Mathematics Society (2014), y puede ser resumido como: "El razonamiento matemático de los estudiantes frecuentemente está basado en sus imágenes del concepto más que en la definición matemática del concepto".

Lo anterior quiere decir que un estudiante puede conocer la definición formal de un concepto matemático, sin embargo, es muy probable que en situaciones en las que tenga que razonar acerca de dicho concepto no utilice la definición que conoce, sino la imagen del concepto que él tenga.

Vinner & Herschkowitz (1980) fueron de las primeras personas en notar que el pensamiento geométrico de los estudiantes está basado en prototipos o imágenes, más que en definiciones. Ellos desarrollaron un estudio con 550 niños de secundaria, en el que a través de un cuestionario se exploraba su entendimiento de distintos conceptos geométricos, entre ellos el de triángulo rectángulo. En uno de los reactivos del cuestionario (véase Figura 1) se les muestra a los estudiantes un grupo de triángulos, y se les pide que señalen los triángulos rectángulos.

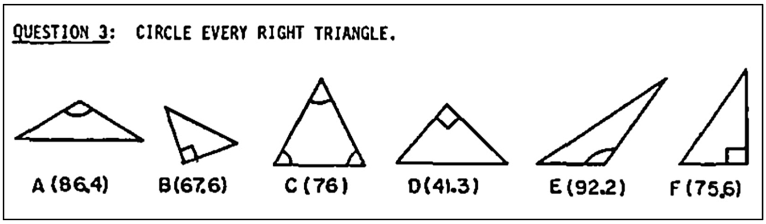

Figura 1. Uno de los reactivos incluidos en el cuestionario de Vinner & Herschkowitz (1980).

A pesar de que los estudiantes entrevistados ya conocían el concepto de triángulo rectángulo, solo 68% de ellos reconocen al triángulo B como rectángulo —en la Figura 1, el segundo de izquierda a derecha—, y 59% de ellos no identifica como rectángulo al triángulo D —el tercero de derecha a izquierda—. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes (76%) sí identifica como triángulo rectángulo a la figura F localizada en el extremo derecho de la Figura 1, la cual es una representación prototípica de triángulo rectángulo.

En un experimento relacionado, Tsamir, Tirosh & Levenson (2008) exploraron el entendimiento que niños y niñas de nivel preescolar tienen sobre el concepto de triángulo. Siguiendo un procedimiento similar al de Vinner & Herschkowitz (1980), a los infantes se les presentaron distintas representaciones de triángulos (véase Figura 2), y ellos tenían que indicar cuáles consideraban que eran triángulos, y cuáles creían que no lo eran.

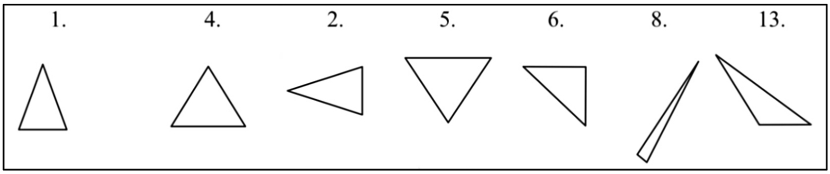

Figura 2. Representaciones de triángulos presentadas a los infantes participantes en el estudio de Tsamir, Tirosh, & Levenson (2008).

Los resultados reportados por Tsamir, Tirosh, & Levenson (2008) muestran que más de 90% de los niños identifican correctamente como triángulos a las representaciones 1 y 4 de la figura 2, mientras que no más de la mitad de los niños identifican como triángulos a las representaciones 2, 5, 6, 8 y 13.

Los resultados de Vinner & Herschkowitz (1980), así como los de Tsamir, Tirosh, & Levenson, (2008), muestran que el razonamiento de los niños sobre los triángulos se basa más en las imágenes o representaciones que ellos poseen sobre esas figuras geométricas que en su definición formal; esto sucede incluso en los casos en que los estudiantes conocen y pueden repetir la definición. Es evidente a partir de estas investigaciones, que las representaciones de triángulos que los estudiantes más fácilmente reconocen como tal, son aquellas que corresponden a ejemplos prototípicos de triángulos; es decir, representaciones de triángulos —usualmente isósceles o equiláteros— con una base horizontal.

Esta última observación cobra sentido si se considera que muchos de los ejemplos y ejercicios sobre triángulos a los que los estudiantes están regularmente expuestos utilizan representaciones prototípicas. Basta con hojear un libro de texto de matemáticas elemental, o revisar los ejemplos, ejercicios y tareas sobre triángulos que los profesores utilizamos, para constatar que una mayoría corresponde a representaciones prototípicas de triángulos. Una recomendación didáctica que se desprende de esta observación, es que los profesores de matemáticas debemos procurar proporcionar a nuestros estudiantes ejemplos, tareas y ejercicios sobre triángulos que sean variados y no únicamente prototípicos, esto para favorecer que la imagen que los estudiantes se formen sobre el concepto de triángulo sea una imagen más rica y robusta.

Hallazgo sólido 2: Esquemas empíricos de demostración

La demostración matemática es uno de los elementos más importantes en el quehacer matemático. Ésta nos sirve, entre otras cosas, para verificar y explicar resultados, así como para organizarlos dentro de un sistema axiomático. Sin embargo, es sabido que usualmente los estudiantes de matemáticas no asignan una importancia mayor a la demostración, y su entendimiento sobre ella suele ser limitado. Más particularmente, *en Edu-*

cation Committee of the European Mathematics Society (2011b) se discute el siguiente hallazgo sólido relacionado con la demostración matemática: "Muchos estudiantes proveen ejemplos particulares cuando se les pide demostrar una afirmación universal".

Para ilustrar este hallazgo sólido, consideremos el siguiente teorema:

Teorema: si n es la suma de cinco números enteros consecutivos, entonces n es divisible por 5.

Una manera de demostrar este teorema es suponer que n es la suma de cinco números enteros consecutivos. Entonces existe un número entero m tal que n es la suma de los enteros m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, y $m+4$, esto es:

$$n = m + (m+1) + (m+2) + (m+3) + (m+4) = 5m + 10 = 5(m+2)$$

Dado que $n = 5(m+2)$, y debido a que $m+2$ es un número entero, se demuestra que n es divisible por 5. No obstante, es sabido que varios estudiantes pueden «demostrar» este tipo de enunciados siguiendo procedimientos que, aunque son incompletos o incorrectos, hacen mucho sentido al estudiante.

Un modo de pensamiento utilizado por estudiantes en contextos de demostración es el llamado *esquema empírico de demostración*. En este modo de pensamiento los estudiantes muestran que la afirmación o teorema se cumple en algunos casos, y a través de ese proceso se convencen ellos mismos de su validez general. Para el caso del teorema anterior, un estudiante podría tomar el caso de 3, 4, 5, 6 y 7 y comprobar que su suma, que es igual a 25, es divisible por 5; enseguida podría tomar el caso de 8, 9, 10, 11 y 12 cuya suma también es divisible por 5. Estos dos casos particulares podrían ser suficientes para que el estudiante esté convencido de la validez del teorema, sin siquiera sentir la necesidad de demostrar que la afirmación es válida para todos los casos posibles de números enteros consecutivos.

Nicolas Balacheff (1987) identificó subcategorías del esquema empírico de demostración. La primera de ellas, llamada *empirismo ingenuo*, se refiere al tipo de situación anteriormente expuesto en el que el estudiante verifica algunos casos particulares y si el teorema o afirmación se cumple para esos casos, entonces asume que el teorema o afirmación se cumple de manera general. La segunda subcategoría se denomina *experimento crucial*, y hace referencia a situaciones en las que el estudiante utiliza un solo caso supuestamente "general" —en el caso del teorema antes enunciado, podría ser por ejemplo una quíntupla de números grandes como 9342, 9343, 9344, 9345 y 9346—, suponiendo que, si se cumple para ese caso, se cumplirá para el resto.

Pero, ¿por qué los estudiantes no sienten necesidad de la demostración y su principal aproximación a ella es a través de esquemas empíricos? Una posible respuesta a esta pregunta es que este fenómeno forma parte de un reto más general que se refiere a la distinción entre el razonamiento en matemáticas y el razonamiento en la vida diaria. El razonamiento en matemáticas puede ir en contra de la intuición y ser incluso contradictorio con nuestras experiencias diarias; por ejemplo, en la vida diaria, si caminamos hacia una pared y nos acercamos más y más a ella, aunque demos pasos muy pequeños, habrá un momento en que llegaremos a tocarla. Pero en un plano cartesiano, la gráfica de una función $f(x)$ puede acercarse más y más —de manera asintótica— a alguno de los ejes del plano y nunca tocarlo. Algo similar pasa con la demostración. Un ejemplo extremo sería que a una persona la mordiera un perro pitbull que anda libre por la calle, y que meses después reciba una nueva mordedura de otro pitbull que también andaba libre por la calle. Es improbable que la persona sienta la necesidad de probar con más perros pitbull antes de convencerse de que es importante que no deambulen solos y sin cadena por la calle. En la vida diaria no requerimos de demostraciones rigurosas: tendemos a generalizar a partir de experiencias particulares.

Se han propuesto distintas aproximaciones didácticas para cultivar la necesidad de la demostración entre los estudiantes y para favorecer su transición de los esquemas empíricos a esquemas más formales de demostración. Se ha propuesto por ejemplo promover una cultura del debate científico en el salón de clases, en la que los estudiantes expongan sus ideas y conjeturas, y los argumentos por los que creen que son correctas, para posteriormente someterlas al análisis y debate con el propósito de construir colectivamente una demostración (Legrand, 2001).

Hallazgo sólido 3: El contrato didáctico en matemáticas

Este hallazgo sólido es de una naturaleza distinta a los dos mostrados previamente. Este hallazgo ayuda a ilustrar el hecho de que no todas las dificultades de aprendizaje en matemáticas son de origen cognitivo. En este caso nos referiremos a un fenómeno didáctico que tiene su origen en las expectativas recíprocas que existen entre el profesor o profesora de matemáticas y sus estudiantes. El hallazgo sólido puede formularse de la siguiente manera: "Los estudiantes frecuentemente responden tratando de cumplir lo que creen que el profesor espera de ellos, en lugar de enfocarse en la situación matemática propuesta".

Un ejemplo clásico que ilustra este hallazgo es el de "la edad del capitán". En torno a 1980 un grupo de investigadores franceses propuso el siguiente problema a varios grupos de estudiantes de entre 7 y 10 años de edad:

Problema: en un barco hay 7 cabras y 5 ovejas. ¿Qué edad tiene el capitán?

Es evidente que los datos proporcionados no bastan para contestar la pregunta planteada. De hecho, los datos ni siquiera son pertinentes: el número de ovejas y de cabras que haya en el barco no tiene que ver con la edad de su capitán. No obstante, la mayoría de los estudiantes se esmeró en encontrar respuestas para la pregunta a como diera lugar. Así, los alumnos ofrecieron resultados como 7 x 5 = 35, entonces el capitán tiene 35 años; 7 + 5 = 12, por lo tanto, el capitán tiene doce años. ¿Por qué casi todos los niños contestan el problema si éste no se puede resolver?

Una explicación al fenómeno anterior —y que es el corazón de este tercer hallazgo sólido— es que, como en cualquier otra sociedad organizada, la clase de matemáticas está regida por un conjunto de reglas explicitas e implícitas y también por expectativas recíprocas. Este conjunto de reglas y expectativas forman una especie de contrato entre el docente y los estudiantes, un *contrato didáctico*. Así, una regla explícita de este contrato podría ser "los estudiantes no pueden utilizar calculadora durante los exámenes", sin embargo, hay otras reglas y expectativas que son tácitas, pero que influyen en el aprendizaje y en el comportamiento de los estudiantes. En el caso de la conducta manifestada por los niños que se enfrentan al problema de "la edad del capitán", ésta puede explicarse debido a la existencia de una expectativa por parte de los estudiantes respecto a su profesor, la cual es un componente del contrato didáctico que se forma entre ellos: la expectativa de los estudiantes consiste en que cuando el profesor les propone resolver un problema, éste siempre está bien planteado y tiene solución. Como los alumnos esperan que el problema tenga solución, no tratan de tomarle sentido a la situación matemática que se les plantea, y solo intentan encontrar la solución usando los datos del enunciado. Que el problema sea absurdo o insoluble simplemente no es una posibilidad que esté considerada dentro de las expectativas de los estudiantes.

Más manifestaciones del contrato didáctico han sido identificadas en otras situaciones y contextos (véase, por ejemplo, Verschaffel, Greer & de Corte, 2000). La siguiente historia (tomada de Education Committee of the European Mathematics Society, 2012) tiene el propósito de ilustrar otro tipo de situación en la que puede manifestarse el contrato didáctico en matemáticas. La historia tiene lugar en una clase de matemáticas con estudiantes de entre 9 y 10 años de edad. La profesora les enseña el siguiente algoritmo que facilita calcular la diferencia entre dos números (véase Figura 3).

$$\begin{array}{rcrcr} 328 & \xrightarrow{+\,3} & 331 & \xrightarrow{+\,50} & 381 \\ \underline{-\ 47} & \xrightarrow[+\,3]{} & \underline{-\ 50} & \xrightarrow[+\,50]{} & \underline{-\ 100} \\ & & 281 & & 281 \end{array}$$

Figura 3. Algoritmo alternativo para calcular la diferencia entre dos números. Tomado de *Education Committee of the European Mathematics Society* (2012).

Como puede apreciarse en la figura anterior, el algoritmo tiene el propósito de transformar la sustracción original en una equivalente, pero donde el sustraendo tome la forma de un número más simple de sustraer del minuendo. Unas semanas después, a los estudiantes se les deja de tarea resolver las siguientes restas:

a) 875 – 378 = ________________________________

b) 964 – 853 = ________________________________

c) 999 – 111 = ________________________________

La mayoría de los estudiantes efectuaron las sustracciones aplicando el algoritmo alternativo que les habían enseñado (véase Figura 3), incluyendo aquella del inciso c):

$$999 - 111 = 1008 - 120 = 1088 - 200 = 888$$

La sustracción del inciso c) se pudo haber resuelto con menos pasos y de forma más simple, si no se hubiera aplicado el algoritmo alternativo, es decir, si se hubiera resuelto de manera directa. Sin embargo, pareciera que el comportamiento de los estudiantes está gobernado por lo que creen que la profesora espera de ellos, más que por la estructura de la resta. Es como si una de las expectativas implícitas del contrato didáctico dictara: "si la profesora enseña una técnica matemática para resolver restas, se debe aplicar a todas las restas que ella proponga".

De los hallazgos sólidos a la investigación de implementación

La iniciativa *Solid Findings in Mathematics Education,* del Comité Educativo de la Sociedad Matemática Europea, puede interpretarse como un esfuerzo por ordenar y sistematizar el conocimiento que la comunidad internacional de educadores y educadoras matemáticas ha producido. Ayuda a identificar resultados de investigación que son más o menos estables a través de contextos, lo cual permite generar conocimiento más robusto sobre la teoría y la práctica de la educación matemática. Pero, ¿qué hay más allá de los hallazgos sólidos? Además de identificar y comunicar los resultados de investigación sólidos, ¿qué más podemos hacer con las innovaciones y los resultados de investigación que producimos, con el fin de mejorar la práctica de la educación matemática?

Pienso que es el momento oportuno para el establecimiento de una *investigación de implementación* (implementation research) dentro del campo de la educación matemática. Un área de investigación enfocada en entender cómo es que las teorías, conceptos, diseños, dispositivos y otros resultados de investigación, producidos en el campo de la educación matemática —incluidos los hallazgos sólidos—, pueden ser implementados en la *práctica* de la educación matemática.

El establecimiento de la investigación de implementación en educación matemática, además de ser relevante, cuenta con antecedentes dentro y fuera de la disciplina que pueden servir como punto de partida para su institución y desarrollo inicial; además, existe un creciente interés en este tipo de investigación dentro de la comunidad internacional de investigadores en educación matemática, el cual puede dar envite al desarrollo de esta área.

La relevancia de la investigación de implementación radica en que nos permitiría enfocarnos en los métodos y las condiciones que promueven o inhiben la adopción de resultados de investigación en la práctica educativa. Además, entre otras cosas, nos permitiría conocer más acerca de cómo lograr que las innovaciones y teorías que generamos produzcan un cambio efectivo y duradero.

Existen antecedentes sobre la investigación de implementación —particularmente en el campo de la medicina, donde incluso existe una revista de investigación especializada llamada *Implementation Science*— cuyos métodos y constructos teóricos podrían ser de ayuda en la gestación de un área de investigación similar en educación matemática. Por ejemplo, existen trabajos teóricos como el de Nilsen (2015) y Rapport *et al.* (2018) que podrían ayudarnos a identificar y definir conceptos clave dentro del área de investigación, así como para aprender a distinguir entre las diferentes categorías de teorías, modelos y marcos de la ciencia de la implementación. En el campo de la investigación educativa también hay antecedentes empíricos y conceptuales sobre la investigación de implementación que pueden ser de gran utilidad para conducir ese tipo de investigación en educación matemática; un ejemplo es la revisión y ordenación conceptual que Century & Cassata (2016) hacen de la investigación de implementación en el área educativa.

En el campo de la educación matemática el "problema de la implementación" no es nuevo. Éste ha sido identificado con anterioridad como un problema que se relaciona con el establecimiento del marco estructural y organizacional en el que la educación matemática tiene lugar (Niss, 1994). Además, es claro que existe conocimiento acumulado en nuestro campo acerca de la implementación de resultados e innovaciones, el cual ha sido generado por investigaciones que de una manera u otra se han enfocado en distintos aspectos de la implementación; por ejemplo, los estudios de reproducibilidad realizados desde los años ochenta, o más recientemente los estudios realizados desde la perspectiva de la investigación de diseño (véase, por ejemplo, Artigue, 1986; Gravemeijer & Cobb, 2006).

Finalmente, existe un creciente interés dentro de la comunidad internacional de investigadores en educación matemática por este tipo de investigaciones, el cual puede verse reflejado en la instauración de un grupo de trabajo temático en el marco del *Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática*, mismo que está enfocado en el estudio de la implementación de resultados de investigación (véase Jankvist, Aguilar, Ärlebäck & Wæge, 2017). Otro indicador de este interés creciente es el número especial y la serie de editoriales sobre implementación que la revista *Journal for Research in Mathematics Education* ha publicado bajo la dirección de Jinfa Cai y su equipo editorial, los cuales abordan este aspecto de la relación entre la teoría y la práctica de la educación matemática (véase, por ejemplo, Cai *et al*., 2017).

La investigación de implementación de resultados de investigación es un área que sin duda nos ayudaría a avanzar en nuestro propósito de mejorar la práctica de la educación matemática. El tiempo mostrará si logra establecerse como un área de investigación propia.

Referencias

Artigue, M. (1986). Modélisation et reproductibilité en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(1), 5-62.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176. DOI: 10.1007/BF00314724

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V. & Hiebert, J. (2017). Making classroom implementation an integral part of research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(4), 342-347. DOI: 10.5951/jresematheduc.48.4.0342

Century, J. & Cassata, A. (2016). Implementation research: Finding common ground on what, how, why, where, and who. *Review of Research in Education*, *40*(1), DOI: 10.3102/0091732X16665332

Education Committee of the European Mathematics Society (2011a). "Solid findings" in mathematics education. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *81*, 46-48.

_____ (2011b). Do theorems admit exceptions? Solid findings in mathematics education on empirical proof schemes. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *82*, 50-53.

_____ (2012). What are the reciprocal expectations between teacher and students? Solid findings in mathematics education on didactical contract. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *84*, 53-55.

_____ (2014). Solid findings: concept images in students' mathematical reasoning. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *93*, 50-52.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational Research Design* (pp. 17-51). London: Routledge.

Jankvist, U. T., Aguilar, M. S., Ärlebäck, J. B. & Wæge, K. (2017). Introduction to the papers of TWG23: Implementation of research findings in mathematics education. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10, February 1-5, 2017) (pp. 3769-3775). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 127-136). Dordrecht: Kluwer.

Nilsen, P. (2015). Making sense of implementation theories, models and frameworks. *Implementation Science*, *10*(53), 1-13. DOI: 10.1186/s13012-015-0242-0

Niss, M. (1994). Mathematics in society. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 367-378. Dordrecht: Kluwer.

Rapport, F., Clay-Williams, R., Churruca, K., Shih, P., Hogden, A. & Braithwaite, J. (2018). The struggle of translating science into action: Foundational concepts of implementation science. *Journal of Evaluation in Clinical Practice*, *24*(1), 117-126. DOI: 10.1111/jep.12741

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 69-110. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Tsamir, P., Tirosh, D. & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81-95. DOI: 10.1007/s10649-008-9133-5

Verschaffel, L., Greer, B. & de Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Vinner, S. & Herschkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 177-184). Berkeley, California: PME.

Correo-e: masanchez@ipn.mx