CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD DISTRITO FEDERAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

UN ESTUDIO SOBRE INTERACCIONES Y COMUNICACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA A DISTANCIA

TESIS QUE PRESENTA

Mario Sánchez Aguilar

PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias

EN LA ESPECIALIDAD DE

Matemática Educativa

DIRECTORA DE LA TESIS: **Dra. Rosa María Farfán Márquez**

México, Distrito Federal **Octubre, 2003**

Al Conacyt

AGRADEZCO AL CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA POR EL APOYO ECONÓMICO PROPORCIONADO PARA LA REALIZACIÓN DE MIS ESTUDIOS DE MAESTRÍA QUE CULMINAN CON EL PRESENTE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN.

Agradezco…

A la Dra. Rosa Ma. Farfán por su visión, sus enseñanzas y por el gran apoyo que siempre me ha brindado. Muchas gracias Doctora.

A la Dra. Asuman Oktaç por ser una parte muy importante en mi formación como matemático educativo.

Al Dr. Francisco Cordero por sus pláticas siempre enriquecedoras y por sus valiosos comentarios durante la parte final de este trabajo.

Al Dr. Ricardo Cantoral por sus enseñanzas dentro y fuera del aula, así como sus invaluables comentarios y recomendaciones para este trabajo.

A mis compañeros en Cicata-IPN quienes forman parte fundamental de este proyecto.

A la familia Fernández Aguilar porque sin su gran apoyo todo esto hubiera sido más difícil.

A mi tía Emma que siempre me brindó su ayuda desinteresada.

A mi mom, pop, alex, paty y chocho, los llevo por siempre en mi corazón.

A Idania por todo su amor, por su gran paciencia y por nuestra pancita.

A mis hermanos Gabriel y César porque esta etapa de mi vida no hubiera sido la misma si ellos.

RESUMEN

La presente investigación aborda el estudio de la comunicación, presente durante procesos de interacción, del tipo estudiante-estudiante en el campo de la educación matemática a distancia. Para realizar el estudio se realiza una adaptación de dos herramientas metodológicas diseñadas originalmente para su aplicación en el campo de la educación matemática presencial.

Con esta investigación intentaremos caracterizar la comunicación de ideas y objetos matemáticos durante un proceso de interacción, así como las adecuaciones necesarias para aplicar las metodologías de análisis al campo de la educación a distancia y el tipo de información que es posible obtener de cada una de ellas.

ABSTRACT

The present research undertakes the study of communication present during interaction processes of the type student-student in the field of Mathematics Education. In order to realize the study, an adaptation of two methodological tools designed originally for its application in the field of the traditional Mathematics Education it was done.

With this research we'll try to characterize the communication of ideas and mathematical objects during an interaction process, as well as the adjustments necessary to apply the analysis methodologies to the field of the Distance Mathematical Education and the type of information that is possible to obtain from each one of them.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La educación matemática a distancia, vía internet, es hoy una realidad en el escenario educativo mundial. El avance de la tecnología continúa abriendo nuevas posibilidades y modos de instrucción en esta área lo cual está originando que en México, cada vez más instituciones educativas se sumen con sus respectivas ofertas y propuestas educativas a esta nueva modalidad de instrucción. Como consecuencia de este crecimiento en el sistema educativo de nuestro país, cada vez más ciudadanos están recibiendo su formación profesional por este tipo de medios, aún y que desconocemos gran parte de las consecuencias didácticas y de los nuevos fenómenos que se generan en esta modalidad de instrucción.

Un estudio que nos muestra datos reveladores sobre la situación de la Educación Superior a Distancia en nuestro país, es el diagnóstico realizado por la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior a las instituciones de educación tanto públicas como privadas más importantes del país.[1] Este diagnóstico revela que del total de instituciones que participaron en el estudio, 85% ofrece la modalidad de Educación a Distancia, mientras que en el 15% restante su implementación está en proyecto.

Evidentemente la Educación a Distancia crece a pasos agigantados, pero, ¿realmente se está vigilando la calidad de los programas que se ofrecen? La respuesta pareciera ser negativa:

> *"El reconocimiento de los programas de educación a distancia, la definición de criterios para la evaluación, la acreditación y certificación de los procesos formativos, la definición de criterios de ingreso y permanencia, por mencionar sólo algunos aspectos involucrados en la educación a distancia exigen que la institución establezca normas y reglas específicas. Los datos indican que, del total de instituciones participantes, más de la mitad no cuentan con una normatividad establecida que les permita tener un criterio institucional para definir los procedimientos..."* (ANUIES, 2001, pp. 37 – 38)

[1] Ver ANUIES (2001)

El estar generando programas de Educación a Distancia sin una normatividad que vigile la calidad de los procesos formativos que las constituyen, es un problema serio que se debe atacar frontalmente. La Matemática Educativa como una disciplina que intenta responder a una demanda social muy importante, como la capacitación matemática de la población en general, debe afrontar el estudio de este nuevo formato educativo, tratando de caracterizar los nuevos fenómenos y problemáticas que presentan. El comenzar a generar resultados tanto teóricos como prácticos que puedan responder a las nuevas problemáticas educativas debe ser una de nuestras respuestas como matemáticos educativos a la sociedad en general y al sistema educativo en particular.

En esta investigación se estudiará un aspecto considerado central por investigadores e instructores del campo de la Educación a Distancia: La interacción.

En el estudio pondremos especial atención a la comunicación entre estudiantes que se ven involucrados en un proceso de interacción al enfrentar una actividad matemática específica.

Los datos utilizados para realizar este estudio han sido tomados del programa de Maestría con especialidad en Matemática Educativa que se imparte en la modalidad a distancia vía internet en el Instituto Politécnico Nacional. Este programa está dirigido principalmente a profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos que buscan actualizarse y profesionalizarse dentro de su actividad docente. Como hemos mencionado, el programa se cursa en un medio virtual, con el uso de una plataforma en internet y medios de comunicación electrónicos (foros sincrónicos, asincrónicos, e-mail). La característica de estas herramientas de comunicación permite que algunas interacciones queden registradas y nos permiten su posterior análisis.

Dado que nuestro estudio se centra en el concepto de interacción, hemos realizado una investigación bibliográfica al respecto, que intenta mostrar un panorama amplio sobre lo que significa este concepto dentro del área de la educación a distancia y además nos muestra las investigaciones realizadas al respecto en el área. Este análisis bibliográfico se expone en el primer capítulo de este trabajo.

Además de ofrecernos una perspectiva sobre el estado actual de las investigaciones referentes al concepto de interacción en educación a distancia, la revisión bibliográfica presentada en el primer capítulo nos permitirá formular algunos de los cuestionamientos que buscaremos responder en esta investigación. Para responder a éstos, abordaremos el análisis de dos interacciones entre estudiantes con dos diferentes herramientas metodológicas diseñadas originalmente en el ámbito de la educación matemática presencial. Una descripción de estos instrumentos de análisis, así como de los elementos teóricos que las sustentan serán presentadas en el segundo capítulo de nuestro trabajo.

El tercer y cuarto capítulo de este trabajo abordan el análisis de las interacciones que hemos seleccionado para este estudio. La primera de ellas se lleva a cabo entre dos estudiantes que utilizan como medio de comunicación un foro sincrónico; en este episodio los estudiantes abordan la resolución de una tarea matemática que gira principalmente en torno al tema de las derivadas sucesivas. En la segunda de las interacciones, participan tres estudiantes, pero en esta ocasión hacen uso de un foro asincrónico para comunicarse entre ellos. La tarea matemática a la que se enfrentan requiere que los estudiantes analicen el efecto que tiene la manipulación de los parámetros de una ecuación en su representación gráfica.

Finalmente, en el quinto capítulo de nuestro trabajo se presentará el tipo de información obtenida al aplicar cada una de las metodologías, y haciendo uso de esta información se intentará responder a las interrogantes planteadas en el primer capítulo.

Incluimos al final del escrito dos anexos; el primero conteniendo el registro completo de la interacción analizada en el capítulo 3, mientras que el segundo de los anexos contiene el reporte grupal producto del consenso generado a lo largo de la interacción que estudiaremos en el capítulo 4 de nuestro trabajo.

CAPÍTULO 1

INTERACCIÓN Y EDUCACIÓN A DISTANCIA

En este primer capítulo intentaremos acotar las preguntas de investigación, las cuales se encuentran directamente asociadas al estudio de uno de los elementos considerado por investigadores e instructores del área de educación a distancia como básico y esencial para favorecer, facilitar y promover el aprendizaje en ambientes de instrucción a distancia. El elemento clave al que hacemos referencia es la *interacción*. El concepto de interacción en matemática educativa ha sido estudiado ampliamente por diferentes autores (véase por ejemplo Voigt, 1995; Sierpinska, 1997; McClain & Cobb, 2001) sin embargo, el concepto de interacción en educación a distancia es mucho más amplio que el considerado en los trabajos de investigación sobre educación matemática presencial.

Con el fin de aclarar la afirmación anterior, vamos a presentar los resultados de una investigación bibliográfica realizada sobre el concepto de interacción que se presenta en la literatura especializada en Educación a Distancia. Esta revisión bibliográfica permitirá comprender la naturaleza del concepto de interacción y complejidad de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de este nuevo tipo de escenarios educativos, para de esta manera ir adentrándonos en los objetivos y la problemática de la investigación.

1.1. EL CONCEPTO DE INTERACCIÓN EN EDUCACIÓN A DISTANCIA

Una de las primeras personas en teorizar sobre los fenómenos de la educación a distancia fue Michael G. Moore. Reconocido entre otras cosas por su Teoría de la Distancia Transaccional, Moore en el año de 1989 publica en la editorial de la revista especializada *The American Journal of Distance Education* el escrito titulado *Three Types of Interaction*. En este escrito el autor afirma que muchos de los problemas de comunicación sobre conceptos en Educación a Distancia se debe a que éstos son usados en formas muy generales e imprecisas por lo que el autor sugiere que los educadores a distancia deben llegar por lo menos a un acuerdo sobre las distinciones de tres tipos de interacciones que él propone en el escrito. Estas interacciones son:

- *Estudiante – Contenido*
- *Estudiante – Instructor*
- *Estudiante – Estudiante*

Interacción Estudiante – Contenido

Este tipo de interacción se refiere a la interacción entre el estudiante y el contenido o sujeto de estudio. Moore le da tanta importancia a esta interacción que asegura que sin ésta no puede haber educación, ya que es el proceso de interactuar intelectualmente con un contenido el que trae como resultado cambios en el entendimiento, perspectiva y estructuras cognitivas del estudiante. Moore considera además que en este tipo de interacción se encuentra al menos parcialmente involucrada un tipo de interacción del estudiante con el mismo, es decir, cuando los estudiantes *hablan con ellos mismos* acerca de la información e ideas que pueden encontrar en alguna fuente de información como un texto o un programa de televisión.

Moore además señala la evolución que ha experimentado este tipo de interacción, desde la interacción con un texto didáctico en las primeras modalidades de instrucción a distancia hasta la interacción con programas para computadoras y discos interactivos.

Interacción Estudiante – Instructor

El segundo tipo de interacción propuesto por el autor, es el del estudiante con el experto que ha preparado el material de estudio, o algún otro experto que funge como instructor. Desde el punto de vista del autor, en este tipo de interacción el instructor organiza la evaluación para asegurarse de que los estudiantes están progresando y ayuda a decidir sobre el cambio de estrategia. Asimismo, en esta interacción los instructores proveen de consejo, apoyo y motivación a cada estudiante, pero la extensión y naturaleza de este soporte por parte del profesor varía de acuerdo al nivel educativo de los estudiantes, la personalidad y filosofía del profesor, entre otros factores.

Un aspecto de este tipo de interacción que es destacado en el escrito es el carácter *individualizado* de este tipo de interacción, esto es, el instructor tiene la posibilidad de establecer diálogos específicos de acuerdo a las necesidades de cada estudiante: atender aspectos referentes a la motivación de un estudiante, o aclarar dudas y concepciones erróneas de otro.

Interacción Estudiante – Estudiante

El tercer formato de interacción propuesto por Moore es el de Estudiante – Estudiante. El autor la define como una interacción entre un estudiante con otros estudiantes la cual se puede llevar a cabo con o sin la presencia del instructor en tiempo real.

El autor afirma que a pesar de que a través de la historia de la educación las clases hayan sido organizadas en grupos por ser la única forma organizacional conocida por la mayoría de los profesores y por ser una forma económica de distribuir los actos de enseñanza tales como la estimulación, evaluación y soporte a estudiantes, la interacción entre los miembros de una clase es una fuente de aprendizaje muy valiosa y en algunos casos esencial.

La propuesta de interacción realizada por Moore, ha sido retomada y en algunos casos ampliada por diferentes investigadores del área de Educación a Distancia. Tal es el caso de la extensión realizada al modelo por Hillman, Hills y Gunawardena en 1994 y que se cita en el trabajo de Gunawardena & McIsaac (ver referencias). Esta extensión consiste en agregar un tipo de interacción considerado por los autores como crítico y ausente de la literatura hasta ese momento: la interacción *Estudiante – Interfase*. Estos autores aseguran que los estudiantes que no poseen las habilidades básicas requeridas para usar un medio de comunicación, emplean grandes cantidades de tiempo aprendiendo a interactuar con la tecnología y utilizan menos tiempo en su lección. Es por esto que recomiendan que los diseñadores instruccionales deben incluir interacciones del tipo Estudiante – Interfase que permitan al estudiante lograr interacciones exitosas con la mediación de la tecnología, es decir, están considerando a la interfase como un medio para lograr y llevar a cabo otro tipo de interacciones.

En trabajos más recientes es posible encontrar los tipos de interacciones anteriormente mencionados junto con nuevas categorías de interacción. Podemos considerar como un ejemplo el trabajo de Atsusi Hirumi (en prensa), el cual se enfoca al análisis, diseño y secuenciación de interacciones a distancia. Hirumi propone un modelo teórico en el cual agrupa diferentes tipos de interacciones distribuidos en tres diferentes niveles que se relacionan entre sí (ver figura 1). En el primer nivel se encuentran las interacciones *Estudiante – Si mismo* (Learner – Self Interactions). Este tipo de interacciones ocurren dentro de cada estudiante en forma individual; éstas incluyen las operaciones cognitivas que constituyen el aprendizaje así como los procesos metacognitivos que ayudan a los estudiantes a monitorear y regular su aprendizaje. Nótese que el tipo de interacción mencionado anteriormente fue considerado inicialmente por Moore (1989) como parte de la interacción estudiante – contenido.

El segundo nivel del modelo propuesto, el cual se encuentra representado en la figura 1, se encuentra dividido en dos grandes grupos de interacciones: Las interacciones *estudiante – humano* y las *interacciones estudiante – no humano*. Como su nombre lo indica, el primer grupo se refiere a las posibles interacciones que pueden tener lugar entre el estudiante y los demás participantes de naturaleza humana que intervienen en un curso dado. Dentro de este grupo podemos resaltar (debido a que no ha sido propuesto por los autores mencionados anteriormente) el tipo de interacción denominado *Estudiante – Otras interacciones humanas*. Al referirse a este tipo de interacciones, el autor señala que se debe explotar el potencial de las tecnologías de telecomunicación para romper las barreras de las aulas de clases (aulas virtuales) y permitir a los estudiantes la búsqueda de información en una variedad de fuentes externas al curso como pueden ser los intercambios con los asistentes del profesor o mentores, los expertos en la materia, así como el staff de soporte académico.

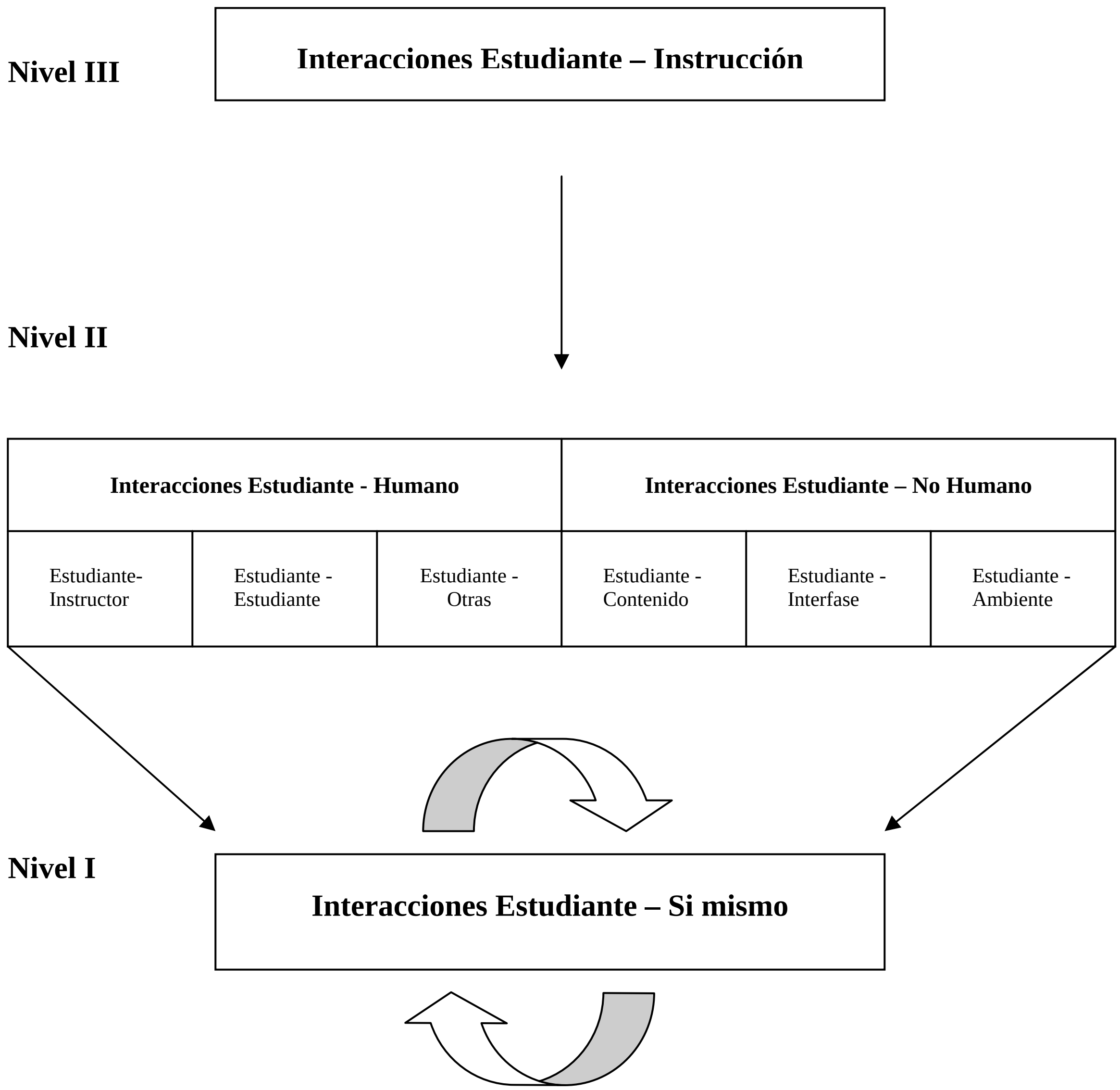


Figura 1. Tres Niveles de Interacción

En el segundo nivel, el grupo de las interacciones Estudiante – No Humano se encuentra compuesto por tres diferentes tipos de interacciones entre las que sobresale por su carácter novedoso la interacción *Estudiante – Ambiente*. Este tipo de interacción tiene lugar cuando los estudiantes manipulan herramientas, equipo o cualquier otro objeto que se encuentra fuera de la interfase de la computadora durante su aprendizaje. Al describir este tipo de interacción el autor nos recuerda que a pesar de que un curso se ofrezca en línea, no todas las interacciones tienen que ocurrir en el mismo formato, es decir, el estudiante puede interactuar con fuentes de conocimiento o herramientas externas a la computadora como puede ser un libro o instrumental de laboratorio por mencionar algunos ejemplos.

El tercer nivel representado en el diagrama anterior es denominado interacción *Estudiante – Instrucción*. Este nivel involucra un arreglo de eventos para promover el aprendizaje y facilitar el logro de objetivos:

> "Learner-Instruction interactions consist of a series of events (or elearning strategy) that are necessary to achieve a defined set of objectives. Level III interactions are considered a meta-level that transcend and serve to organize level II interactions." (Hirumi, en prensa, p. 9)

Es claro que, casi la totalidad de las modalidades de interacción presentadas previamente se centran en el estudiante, sin embargo existen algunos autores que han volteado su mirada hacia el profesor, generando una perspectiva más amplia del concepto de interacción. Un ejemplo de esto es el trabajo de Tuovinen (2000), en el cual además de abordar algunos de los modos de interacción previamente mencionados nos presenta la interacción *Instructor – Contenido*. En este trabajo se plantea una clasificación del contenido que constituye un curso a distancia: El contenido invariante y el contenido cambiante. El autor afirma que existe cierto contenido en un curso que generalmente no cambia el cual se encuentra diseñado y planeado en forma previa al curso, sin embargo existen también ciertas modificaciones, adecuaciones o incluso extensiones que el profesor hace al contenido de acuerdo a los requerimientos de los estudiantes y al desarrollo del curso; por ejemplo, se pueden agregar ligas de interés (links) u otro tipo de material relevante para el curso una vez que éste ha comenzado.

Uno de los trabajos más completos acerca del concepto de interacción desde la perspectiva del instructor encontrado en nuestra revisión bibliográfica es el realizado por Mortera-Gutiérrez (2002). En éste se presenta el reporte de una investigación la cual tiene como objetivo documentar y analizar las interacciones y estrategias utilizadas por los instructores en diferentes cursos de educación a distancia en una universidad del sur de

Estados Unidos. Esta investigación reveló que las interacciones observadas en los instructores no estaba totalmente representadas en la literatura de la educación a distancia. Los diferentes tipos de interacción identificados en este estudio son:

- *Instructor-Tecnología*
- *Instructor – Contenido*
- *Instructor – Estudiante*
- *Instructor-Facilitador* (Instructor-Facilitator)
- *Instructor-Compañeros* (Instructor-Peers)
- *Instructor-Staff de Soporte/Personal Técnico*
- *Instructor-Institución*

Como podemos apreciar a lo largo de este recorrido, en el contexto de la Educación a Distancia el concepto de interacción sufre de una especie de ampliación debido a los elementos con los que el humano puede interactuar en estos escenarios, los cuales al ser utilizados con fines didácticos pueden originar que los procesos de enseñanza-aprendizaje posean una complejidad muy particular.

Los estudios sobre educación a distancia propios de la matemática son muy pocos si los comparamos con la cantidad de trabajos producidos en la relativamente nueva modalidad de instrucción. En forma intencional hemos separado en nuestra presentación del concepto de interacción los trabajos desarrollados bajo perspectivas teóricas de nuestra disciplina (la Matemática Educativa) y que abordan problemáticas de carácter menos general como los que hemos presentado anteriormente; esto con la finalidad de enunciar algunos de los resultados más importantes, así como algunas características compartidas por estos trabajos.

1.2. LOS ESTUDIOS SOBRE INTERACCIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA A DISTANCIA

Comenzando en orden cronológico, mencionaremos inicialmente el trabajo de tesis Doctoral de Soury-Lavergne (1998) en el cual se centra en el concepto de *préceptorat*[2]. Uno de los resultados generados por este trabajo señala que las intervenciones del *préceptorat* que modifican la relación alumno-milieu pueden ser analizadas como una negociación del significado de la situación del alumno, y al parecer esta misma negociación, una vez que se compromete, puede dar lugar de efecto Topaze que caracteriza una modificación fundamental de la relación alumno-*milieu*, desvirtuando el significado de los conocimientos construidos por el alumno en la interacción con el *milieu*.

Otro de los trabajos importantes que debemos mencionar es el realizado por Sutherland & Balacheff (1999) en el cual analizan un capítulo de enseñanza de la Geometría a distancia. Este episodio didáctico es tomado de una serie de experimentos con el ambiente de enseñanza-aprendizaje a distancia denominado TÉLÉCabri. Este ambiente permite la interacción a distancia entre un estudiante y un tutor humano a través de un sistema de computadora cuya interfase dispone de elementos tecnológicos compartidos por ambos (el estudiante y el profesor): el programa de geometría dinámica Cabrigéomètre, un procesador de texto, una ventana de video y un botón que permite que el profesor sea llamado. Los autores muestran algunos elementos del diálogo que se da entre el profesor y el estudiante al intentar éste último resolver una actividad matemática a través de la manipulación del software geométrico. Los investigadores muestran cómo durante este diálogo, las condiciones para el efecto Topaze[3] son creadas. Los autores además intentan mostrar que la computadora está en un lugar intermedio entre los objetos matemáticos específicos (recta, número) y los objetos abstractos matemáticos (*x*, propiedad), destacando el rol crucial del profesor durante las construcciones del estudiante.

---

[2] "Nous appelons *préceptorat* la situation d'enseignement et d'apprentissage qui réunit un professeur et un *unique* élève pour une interaction didactique individualisée." (Soury-Lavergne, 1998, p. 55).

[3] "[In some situations, expecting a given answer]...the teacher chooses questions to wich this answer can be given. Of course, the knowledge necessary to produce these answer changes, as does its meaning. By choosing easier and easier questions, the teacher tries to achieve the optimum meaning for the maximum number of students. If the knowledge disappears completely, we have the *Topaze effect*" (Brousseau, 1997, p. 25)

Otro estudio sobre interacciones realizado con el uso de la plataforma TÉLÉCabri es el realizado por Masseux (2000) en el cual se centra en las interacciones del estudiante con el ambiente multimodal proporcionado por TÉLÉCabri, así como el papel del instructor como regulador en esta relación. El autor se refiere a TÉLÉCabri como un ambiente multimodal de aprendizaje debido a que está conformado de tres *milieux* que incluyen aplicaciones distintas:

- Un *milieu* “oral” de visio-interacción.
- Un *milieu* “web interactivo dedicado a la Geometría” incluyendo una base de ejercicicios, de definiciones y de propiedades.
- Un *milieu* “Cabrigéomètre”, herramienta de representación gráfica y de manipulación directa de objetos geométricos, lugar de resolución de problemas.

Masseux señala además que la plataforma TéléCabri proporciona un eje de investigación destinado a estudiar las propiedades cognoscitivas de la interfase de un medio ambiente informático multimodal como herramienta de enriquecimiento de la interacción didáctica a distancia, y que esta plataforma proporciona una herramienta precisa de observación ampliada de los procesos de regulación didáctica y exploración de métodos de interacción cooperativos entre alumnos y profesores.

Finalmente nos referiremos al trabajo realizado por Montiel (2002) en el cual se muestra la viabilidad de aplicación de la aproximación *socioepistemológica*[4] como soporte teórico para el estudio de fenómenos propios de la Educación Matemática a Distancia, y además se establece al *contrato didáctico* como una categoría teórica independiente de los escenarios educativos.

Nótese cómo las investigaciones mencionadas anteriormente poseen algunas características en común, como por ejemplo el hecho de utilizar dentro de sus análisis categorías propias de la teoría francesa tales como milieu, contrato didáctico, efecto Topaze, etc. y el hecho de que la interacción del tipo estudiante-instructor juegue un rol central en estas investigaciones.

[4] Ver Cantoral & Farfán (1998).

Uno de los trabajos que dio lugar a algunos de los cuestionamientos que motivan esta investigación es el desarrollado por Montiel (2002). En este trabajo se estudian las interacciones entre un grupo de estudiantes y su profesor al discutir la solución de determinadas tareas matemáticas relacionadas con el concepto de derivada. En la investigación, el análisis de las interacciones se basa en el estudio de: comentarios individuales por parte de los estudiantes sobre un determinado tópico, respuestas de tipo grupal a una tarea matemática específica, intervenciones y observaciones por parte del profesor a los comentarios de los estudiantes y sólo algunos comentarios entre los mismos estudiantes. Hemos señalado lo anterior con la intención de presentar uno de los primeros cuestionamientos que nos hicimos en ese momento: ¿Qué podemos decir del proceso que se lleva a cabo para lograr una respuesta grupal antes de ser presentada al maestro?, es decir, ¿Cómo se desarrollan las interacciones del tipo estudiante-estudiante cuando éstos se encuentran resolviendo una actividad matemática particular y se requiere construir una respuesta grupal?

En este punto de la investigación se tenía claro que nuestro interés estaba en observar las interacciones de tipo estudiante-estudiante en el momento en que éstos se enfrentan a una tarea matemática, pero para seguir definiendo y acotando nuestro problema de investigación era necesario abordar el asunto de *los medios o formas de comunicación* en internet, el cual exponemos a continuación.

1.3. HERRAMIENTAS DE COMUNICACIÓN EN INTERNET

El medio o conducto por el cual se hace posible la interacción entre estudiantes y profesores en cualquier escenario educativo es la comunicación. En el caso particular de la educación a distancia esta comunicación puede realizarse por diversos medios: e-mail, foros sincrónicos (chat), foros asincrónicos, conversaciones de voz, medios impresos, videoconferencias, etc. El estudio publicado por Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES, 2001) respecto al estado de la educación superior a distancia revela que las modalidades de comunicación a distancia empleadas por las instituciones de educación superior mexicanas se encuentran distribuidas en las siguientes proporciones:

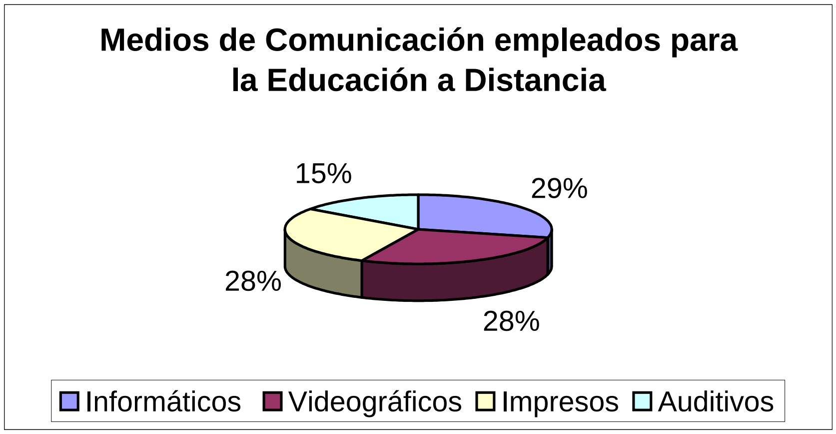


Figura 2. Medios de comunicación utilizados en la Educación Superior a Distancia

Como podemos apreciar, los medios informáticos de comunicación, es decir, los mediados por computadora son los más utilizados en el escenario educativo a distancia del nivel superior. Dentro de este conjunto se encuentra un medio de comunicación con características muy particulares el cual nos interesa estudiar como modo de acción para las interacciones estudiante – estudiante. El medio al que nos referimos es el medio escrito.

Las comunicaciones escritas a distancia (e-mail, foros sincrónicos, foros asincrónicos) poseen características propias que las hacen diferir ampliamente de las comunicaciones verbales que tradicionalmente se utilizan en medios presenciales. Estas características varían dependiendo de la herramienta de comunicación a la que nos estemos refiriendo. Por ejemplo, como varios investigadores lo han señalado (Oktaç, 2001; Montiel, 2002; Lapadat, 2002), las intervenciones en los foros asincrónicos favorecen la reflexión de los participantes sobre sus propias contribuciones a la discusión:

> "However, written composition typically is a much slower process than composing remarks for spoken discussion, both because the formal conventions for writing are complex and interwoven, and also because composition time is not arbitrarily abbreviated by the time limitation constraints of real-time conversation (Yates, 1996). The result is that online participants can and do take time to think, to polish what they say, and to edit. Participants in asynchronous conferences produce less in total quantity (e.g., number of words), but

> their contributions to the discussion tend to be carefully crafted, adapted to the audience, dense with meaning, coherent, and complete" (Lapadat, 2002, p. 6).

Es claro que los medios de comunicación escritos, propios de la Educación a Distancia poseen características y propiedades que los hacen únicos. Estas características son las que favorecieron el surgimiento de más interrogantes dentro del marco de esta investigación sobre el fenómeno de la Educación Matemática a Distancia; por ejemplo, un medio escrito no cuenta con herramientas de comunicación tales como la gesticulación, la cual puede desempeñar un rol importante en la comunicación durante la resolución de problemas matemáticos que involucran velocidad y tiempo (Reynolds & Reeve, 2002), entonces, ¿cómo se efectuará la comunicación de estos conceptos matemáticos en un medio escrito?, es decir, si un concepto matemático (por ejemplo el de función) puede ser representado en diferentes contextos (gráfico, numérico, algebraico, etc.) ¿cómo es comunicada la noción matemática que se encuentra representada en alguno o varios de estos contextos durante una interacción escrita del tipo estudiante-estudiante?, ¿cómo se activan estas representaciones del concepto matemático durante una resolución grupal de alguna tarea matemática?. El poder responder a estas interrogantes centradas en los procesos de comunicación de ideas matemáticas en escenarios propios de la Educación a Distancia nos permitirá tener un conocimiento más amplio de los procesos de interacción generados al enfrentarse a la resolución de una actividad matemática en situación escolar.

En el siguiente capítulo abordaremos los fundamentos teóricos que hemos utilizado para el estudio de nuestra problemática y que utilizaremos para dar una interpretación final a los análisis de interacciones que presentaremos en los capítulos 3 y 4.

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

El escenario en el que se plantea esta investigación, el de la educación a distancia, resulta ser un escenario de instrucción relativamente novedoso en el que la investigación en Matemática Educativa a comenzado a desarrollarse; sin embargo, como lo podemos constatar en la investigación bibliográfica presentada en el capítulo 1, el estado actual de la investigación sobre las problemáticas concernientes a nuestra disciplina se encuentra aún en un estado incipiente. Este hecho se presenta como un obstáculo para nuestra investigación, ya que las herramientas teóricas para estudiar las nuevas problemáticas en este tipo de escenarios son aún exiguas:

> "The recent developments in technology and growing interest for using virtual means and online materials in the teaching of mathematics in general and [linear] algebra in particular necessitate a study of these phenomena from a educational point of view... [These studies] should explore theorical frameworks that can explain mathematics teaching and learning in these environments. These research might include a look at the existing frameworks to verify if and how they fit into the new environments, and see what modifications are necessary to explain the new phenomena" (Oktaç, 2001, p. 502)

Como hemos planteado en el capítulo 1, el interés de nuestra investigación se centra en el estudio de las interacciones del tipo estudiante-estudiante y en particular en la comunicación de conceptos matemáticos durante estos procesos de interacción.

Para efectuar el estudio, fue necesario encontrar un elemento metodológico que cubriera nuestras necesidades de investigación, esto es, que nos permita mirar de una manera fina y detallada la interacción de los estudiantes insertados en un medio virtual y que dé un énfasis especial al rol de la comunicación durante las interacciones.

La necesidad de localizar un instrumento metodológico con tales características nos llevó a indagar en los instrumentos metodológicos propuestos en la literatura especializada de educación a distancia para el estudio específico de interacciones entre estudiantes. En esta búsqueda se encontraron algunas herramientas metodológicas especialmente diseñadas para llevar a cabo las observaciones de las interacciones.

En el caso de las interacciones escritas (es decir en foros sincrónicos y asincrónicos), es posible encontrar en la literatura especializada diferentes metodologías desarrolladas especialmente para analizar este tipo de relaciones (ver por ejemplo Gunawardena, Lowe & Anderson, 1997; Pena-Shaff, Martín & Gay, 2001; Hara, 2002). Estas metodologías pueden considerarse insuficientes e inapropiadas para nuestros objetivos de investigación, debido a que se enfocan a analizar únicamente "flujos de interacción" entre los participantes de las discusiones, relaciones entre las diferentes categorías de interacción establecidas y lo más importante el saber en juego en cada uno de estos análisis es de una naturaleza completamente diferente a la que puede presentar un conocimiento matemático. El utilizar este tipo de metodologías nos permitiría mirar el curso y desarrollo de las interacciones de los estudiantes, pero nos ocultaría el papel que juega la comunicación en el surgimiento de objetos matemáticos durante las interacciones. Es así que la atención de nuestra búsqueda de un instrumento metodológico que se adecuara a las necesidades de nuestra investigación abandonó el campo de la educación distancia, para enfocarse al campo de la investigación en Matemática Educativa. En esta búsqueda encontramos que los dispositivos metodológicos más utilizados para el análisis de interacciones provienen de la *etnometodología*, tal es el caso del análisis de discurso. Sin embargo, se ha encontrado que la mayoría de estos trabajos trata con reglas y normas que constituyen las prácticas matemáticas de un salón de clases, mientras que poca atención se le ha dado a los tópicos directamente relacionados con los contenidos matemáticos de aprendizaje y casi ninguna a la comunicación de objetos matemáticos (Sfard, 2000, p. 298).

En un momento dado de nuestra búsqueda, nos encontramos con un instrumento metodológico desarrollado por Anna Sfard y Carolyn Kieran, para analizar interacciones humanas en clases de matemáticas y la cual se centra en la función de la comunicación para el surgimiento de objetos matemáticos durante estas interacciones. Esta metodología es denominada *Análisis Focal*[5] (ver Sfard 2000; 2001).

2.1. UNA DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS FOCAL

La posición y el valor que le asigna Sfard a la comunicación durante las interacciones humanas en una discusión de tipo matemático es lo que nos hace considerar al *análisis focal* una herramienta metodológica apropiada para los objetivos de nuestra investigación.

Sfard (2000, p. 297) considera que la comunicación no debe ser simplemente considerada como útil para construir y compartir el conocimiento de objetos matemáticos preexistentes, sino que la comunicación y sus exigencias deben ser ahora consideradas como la principal causa de su existencia. Así, Sfard (2000; 2001) propone en su trabajo una metodología que se enfoca al análisis de la comunicación y su relación con el surgimiento de objetos matemáticos.

Después de realizar una revisión sobre las diferentes definiciones de comunicación y argumentar lo incompatible de éstas con sus ideas teóricas sobre el papel de la comunicación, Sfard propone su propia definición sobre este concepto:

> "[C]ommunication may be defined as an activity in which one is triying to make his or her interlocutor act or feel in a certain way" (Sfard, 2000, p. 300).

Para aclarar esta idea la autora menciona varios ejemplos simples, por ejemplo, si una persona le dice a otra persona: 'buenos días' va a esperar que la otra persona le responda con un saludo similar; o cuando un profesor afirma: 'denotaremos a la derivada de una función f con $\frac{df}{dx}$' es un intento de asegurarse que en sus futuras expresiones los estudiantes sean capaces de referirse a la derivada de una función usando los símbolos apropiados. Es así, que las expectativas del emisor de un mensaje deben ser

[5] Nuestra traducción de *Focal Analysis*.

retroalimentadas con una reacción por parte de su interlocutor para que la comunicación sea efectiva, aunque esta reacción no sea precisamente la que el emisor espera, por ejemplo, en el caso de los 'buenos días' la persona puede responderle el saludo no de manera verbal, sino con un simple ademán. Al conjunto de expectativas e intenciones de cada uno de los participantes de una discusión Sfard los denomina *meta–reglas*. (para una explicación más amplia al respecto ver Sfard, 2000). El análisis de estas meta-reglas se encuentra considerado en esta metodología bajo el nombre de *análisis de preocupación* (Preoccupation analysis) este análisis se centra en los flujos de interacción de los participantes de una discusión así como las actitudes y expectativas de los mismos. El análisis de estos comportamientos se representan en forma gráfica para facilitar el mismo (una descripción más amplia del método se encuentra en Sfard, 2001).

Otro factor, quizás el más importante para lograr la efectividad de comunicación es lo que Sfard denomina el *foco discursivo*, que se refiere a la expresión usada por un interlocutor para identificar el objeto de su atención, sin embargo, en el proceso de refinar su instrumento metodológico surgió la necesidad de ser más específico acerca del *qué y cómo* atiende una persona cuando se está expresando. Es en este momento que el foco discursivo se divide en tres ingredientes focales necesarios para el análisis de la comunicación durante interacciones humanas:

- El foco pronunciado
- El foco atendido
- El foco proyectado

Para intentar aclarar cada uno de estos conceptos tomaremos un ejemplo presentado en Sfard (2000) acerca de una conversación no matemática entre un grupo de niños que se encuentran en una tienda comprando provisiones para una excursión que han planeado:

Niños escogiendo manzanas para una excursión escolar

1. *Casey*: Yo pienso que deberíamos tomar esas, las verdes. Son muy dulces.

2. *Brad*: Yo prefiero las rosadas. ¿Ves las manchas negras en esta?. Las verdes tienen gusanos.
3. *James*: ¿Cuál?
4. *Brad*: Ahí en la primera fila, a tu derecha.
5. *Janice*: Si, las rosadas son mejor. Con la verde nunca sabes. No es consistente; algunas veces tienes una grande, y algunas veces terminas con una muy pequeña.

Las palabras utilizadas por interlocutor para identificar el objeto de su atención (por ejemplo, 'las verdes' en la expresión 1) es lo que se denomina el *foco pronunciado*. El qué y el cómo se atiende al objeto de atención (viéndolo, escuchándolo, etc) se denomina *foco atendido*. Sin embargo dentro del foco discursivo hay más que mirar que los aspectos pronunciados y atendidos:

> "[W]hen Casey announces that the green apples are sweet – something that she cannot simply deduce from what he sees – she clearly relates what she sees to what she knows. The term *green apple*, as used in utterance 1, does not stand for a specific apple the girl is looking at, but even so it denotes for her a well-defined and well-understood object: Casey is not only able to identify a green apple when she sees one but can also evoke its prototypic image, can list its properties even if they are not accessible to direct inspection, knows how to relate it to other things that populate her world, and can put the term "the green apples" to many discursive uses that are not simple logical derivative of what she sees at the moment. A third component, *intended focus*, must thus be considered along with the pronounced and attended foci. The intended focus is the interlocutor's interpretation of the pronounced and attended foci..." (Sfard, 2000, p. 304).

Para evaluar la efectividad de la comunicación y cómo a través de ésta emergen objetos matemáticos, esta metodología se centra en la comparación del foco discursivo de los interlocutores de una conversación. Sin embargo un buen ajuste entre los focos pronunciados y atendidos no es un criterio adecuado para juzgar la efectividad de la comunicación:

> " [P]eople may be using different pronounced foci, and even different atended foci, and still feel that they speak of the same thing. This situation could occur if, for example, one

> interlocutor, when looking at the expression $y = -5x + 3$, said, 'The *slope* of this function is negative five', and the other, when looking at the graphical representation of the expression, said, 'Yes, *it* is negative'. The reverse situation must be considered as well: One may sometimes have a clear sense of a communication breach even when interlocutors use the same pronounced focus and are apparently attending with their eyes to the same thing. Imagine, for example, two students looking at the same point on the graph, using the same pronounced focus (e.g., 'the derivative'), and still making contradictory claims about its features (e.g., 'Here, the derivative is positive' versus 'No, this derivative is negative'). In a situation like this, one may conclude that these two students 'cannot be talking about the same thing'" (Sfard, 2000, pp. 305-306).

Debido a los factores anteriormente mencionados, Sfard asegura que la efectividad de la comunicación depende principalmente del foco proyectado.

A pesar de que el análisis focal se generó originalmente para el estudio de la comunicación verbal, consideramos que es posible extrapolar esta metodología hacia el estudio de la comunicación escrita en educación matemática a distancia:

> "I think [the focal analysis] it may be useful in this cases as well. The focal analysis can be applied for any kind of communication, the written included. After all, this is about what people focus on when they exchange utterances, and it is really not important whether the 'utterances' are audible or just visible. Focal analysis is of use whenever there is a dialogue (and the latter, by the way, does not have to be between two different people – it can be a conversation one leads with oneself !)" (Anna Sfard, Comunicación Personal, 20 de febrero de 2003).

La interacción presentada en el capítulo 3 muestra el tipo de información obtenida al aplicar esta metodología de análisis.

El segundo instrumento metodológico que hemos empleado para el análisis de las interacciones entre estudiantes se basa en los supuestos teóricos establecidos en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992; 1997) y en particular en el trabajo desarrollado por Bosch & Chevallard (1999) referente a la dimensión ostensiva de la actividad matemática. Una explicación al respecto se presenta a continuación.

2.2 LA DIMENSIÓN OSTENSIVA DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) considera al saber matemático como una forma particular de conocimiento, que es el fruto de la acción humana institucional, es decir, que se produce, se utiliza, se enseña o más generalmente se transpone en las instituciones. De esta manera es que se conciben a las matemáticas como construcciones y actividades institucionales.

Una noción básica dentro de esta teoría y que es utilizada para describir el conocimiento matemático es la noción de organización praxeológica o praxeología matemática:

> "En toute institution, l'activité des personnes occupant une position donné se décline en différents *types de tâches T*, accomplish au moyen d'une certaine *manière de faire*, ou *technique*, τ. Le couple $\left[T/\tau\right]$ constitue, par definition, un *savoir-faire*. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé: il appelle un environnement technológico-théorique $\left[\theta/\Theta\right]$, ou *savoir* (au sens restreint), formé d'une *technologie*, θ, <<discours>> rationnel (*logos*) cense justifier et render intelligible la technique (*tekhnê*), et à son tour justifié et éclarié par une *théorie*, Θ, généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté $\left[T/\tau/\theta/\Theta\right]$, constitue alors une organisation *praxéologique* ou *praxéologie*, dénomination qui a le mérite de rappeler la structure bifide d'une telle organisation, avec sa partie pratico-technique $\left[T/\tau\right]$ (savoir-faire), de l'ordre de la *praxis*, et sa partie technologico-théorique $\left[\theta/\Theta\right]$ (savoir), de l'ordre du *logos*." (Chevallard, 1997; pp. 37-38)

La cita anterior nos describe define a las praxeologías por medio de cuatro componentes, el primero, el tipo de tareas en la que un objeto matemático determinado se ve involucrado; segundo, las técnicas utilizadas para afrontar y resolver este tipo de tareas; tercero, la tecnología, esto es, el discurso matemático que justifica y permite entender cierta técnica; y por último la teoría que es una justificación de la tecnología o como algunos investigadores le suelen llamar: la tecnología de la tecnología (ver Artigue, 2002; Chevallard, Bosch & Gascón, 1998). Miremos un ejemplo para aclarar estos conceptos:

Considere el siguiente problema:

▪ Determine las raíces de la ecuación $y = x^2 - 4x - 77$

La *tarea* anterior involucra al objeto matemático *ecuación cuadrática*. Para encontrar las raíces x_1 y x_2 de una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, es posible aplicar la *técnica* conocida como fórmula general para ecuaciones cuadráticas dada por

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En una clase de matemáticas, un profesor puede introducir está técnica por medio de distintos ejemplos e ilustraciones gráficas, que muestren la efectividad de la misma. Esta justificación es lo que se conoce como la *tecnología*. Este discurso utilizado por el maestro puede convencer al estudiante de que la aplicación de la fórmula *siempre* dará como resultado las raíces de la ecuación, ya sean reales, imaginarias, o con multiplicidad; sin embargo, la tecnología no justifica el *por qué* siempre podremos obtener las raíces, es decir, por qué la técnica funciona. Un discurso que justificara lo anterior, vendría a ser la *teoría*.

Como hemos mencionado, estos cuatro componentes forman una organización praxeológica. El conjunto de técnicas, tecnologías y teorías organizadas alrededor de un tipo de tarea específico forman lo que se conoce como una *praxeología puntual* (Bosch & Chevallard, 1999).

Por otro lado, la TAD establece que la actividad matemática se encuentra condicionada por objetos materiales, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a los sentidos; esto quiere decir que cuando se está trabajando con objetos matemáticos, en realidad se están manejando *representaciones* de los mismos[5]. Es en este punto que la TAD

---

[5] Anna Sfard asume una posición similar al respecto: "[T]he symbols, allow discourse participants to deal with things that are not necessarily present here and now, so that the 'invisibles' become a basis for a well defined attended focus in spite of their absence. In short, in mathematical discourse symbolic artifacts are the principal, if not the only, tools for satisfying our ever-present need for perceptual mediation." (Sfard, 2000, p. 321)

establece una diferencia entre dos tipos de objetos: los objetos *ostensivos* y los *no ostensivos*:

> "Nous parlerons d'*objet ostensif* – du latin *ostendere*, <<montrer, présenter avec insistanse>> – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est – il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont le sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes. Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces <<objets>> qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, percus ou montrés par eux-mêmes: ils ne peuvent qu'être *evoqués* ou *invoqués* par la manipulation adécuate de certains objets ostensifs asocies (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours)." (Bosch & Chevallard, 1999; p. 90)

Tanto los objetos ostensivos como los no ostensivos son considerados en la TAD como *objetos institucionales*, donde su existencia depende raramente de la actividad de una sola persona.

Los objetos ostensivos tienen una fuerte relación con las praxeologías matemáticas, ya que los primeros son considerados *instrumentos* de la actividad matemática, es decir, objetos manipulables por medio de los cuales se puede realizar la acción.

Según la TAD, cuando se está realizando una actividad matemática, los ostensivos asociados que se activan se manifiestan en diferentes *registros ostensivos*, como el registro oral, el registro escrito (que incluye gráficos y escrituras) y el registro gestual.

Otro punto importante de destacar para nuestra investigación, es que en la TAD se establece que los objetos ostensivos tienen un *valor instrumental* y un *valor semiótico*:

> "Pris dans une certaine pratique, les objets ostensifs manipulés apparaissent clivés, dans leur matérialité, en ce que je nomme une *valence instrumentale* et une *valence sémiotique*. Je les nomme pour cela *instruments sémiotiques*. La valence instrumentale de l'instrument sémiotique me permet de *faire* ; sa valence sémiotique permet de *voir ce qui est fait*, à moi et à ceux qui m'observent" (Chevallard, 1996; citado en Jean, 2000)

El valor instrumental se refiere a la ventaja que puede presentar un ostensivo sobre otro como instrumento al momento de realizar una determinada actividad matemática. Pongamos como ejemplo el caso del ostensivo "$\sqrt{\ }$". Si tuviéramos necesidad, por ejemplo, de calcular el valor de la expresión $f'(x)$ para $f(x)=\sqrt{x}$, la notación $x^{\frac{1}{2}}$ tendría un valor instrumental superior al de $\sqrt{x}$, ya que con el exponente fraccionario podríamos aplicar la siguiente técnica:

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Utilizando el ostensivo $\sqrt{\ }$, la anterior técnica no se podría utilizar. Como podemos ver en la anterior cita de Chevallard, el valor semiótico se refiere a que un determinado ostensivo te permite "ver" lo que se hace; por ejemplo, al manipular los valores de h y k en la expresión:

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

Fácilmente podremos "ver" el efecto de tal manipulación en el vértice de la correspondiente parábola, propiedad que no resulta ser evidente en la expresión equivalente $y=ax^2+bx+c$.

Se han desarrollado metodologías de análisis dentro de este marco teórico como la expuesta en Bosch, Espinoza & Gascón (2003), donde se analiza cómo un profesor desarrolla técnicas, tecnologías y teorías para dirigir un proceso de estudio. Sin embargo, dado que nuestro interés se centra en la interacción entre estudiantes en un medio virtual, y en especial en la comunicación, hemos optado por la identificación de los objetos ostensivos utilizados por los estudiantes para comunicar sus ideas matemáticas. Esto nos va a permitir contestar a algunas de las interrogantes planteadas en el capítulo 1, como la forma en que se realiza la comunicación de objetos matemáticos en medios escritos.

Como lo veremos en el capítulo 4, la metodología utilizada consistió en identificar los ostensivos utilizados por los estudiantes durante cada una de sus intervenciones en el foro de discusión, esto nos va a permitir identificar las técnicas utilizadas por los estudiantes al enfrentar una actividad matemática particular y mirar como éstas convergen o divergen en un proceso de consenso. Algunas adecuaciones fueron necesarias para la aplicación de los elementos teóricos previamente mencionados al estudio de los fenómenos generados en este tipo de escenario de instrucción matemática. Esto será tratado con detalle en el capítulo cuatro.

CAPÍTULO 3

EL CASO DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS

En este capítulo se presenta el análisis de la interacción entre dos estudiantes en el cual hemos utilizado la metodología denominada análisis focal, expuesta en el capítulo 2. La interacción entre los estudiantes se ha realizado utilizando como medio de comunicación un foro asincrónico, mejor conocido como "chat".

La actividad matemática discutida por los estudiantes durante este proceso de interacción, es una tarea que les fue asignada dentro de una de sus asignaturas. Aunque originalmente la tarea fue asignada como una labor individual, les fue extendida una invitación de mi parte[6] a realizar esta tarea en forma conjunta, discutirla en un foro asincrónico y posteriormente grabar la conversación para su posterior análisis el cual sería parte de una investigación. Esta actividad matemática fue desarrollada por Rigoberto González y posteriormente presentada en su trabajo de tesis (ver González (1999))[7]. Tal y como lo señala el autor de esta secuencia didáctica, algunos de los objetivos de la misma son dar una resignificación al concepto de la derivada, así como encontrar las dificultades que obstaculizan la construcción de esta noción. Las dos últimas partes contenidas en esta actividad denominadas "Caminando hacia la escuela" y "Examinando el llenado de recipientes" respectivamente, no se encuentran contenidas en el trabajo de González (1999). Estas actividades fueron diseñadas por uno de los profesores auxiliares del curso, y fueron anexadas para complementar la actividad (ver Castañeda, 2003). Esta parte final de la actividad tiene como objetivo que los estudiantes interpreten el significado de representaciones gráficas en contextos físicos como el movimiento de un cuerpo o el llenado de un recipiente con algún líquido.

Los estudiantes que participan en esta interacción, tienen una formación académica distinta el uno del otro: Pablo es Ingeniero Industrial y al momento de la investigación se

[6] Los estudiantes aceptaron la invitación, dado que en este curso participé como profesor auxiliar y una de mis funciones era revisar sus tareas y proveerlos de retroalimentación.
[7] Este diseño didáctico a sido retomado en trabajos de investigación posteriores como el de Valero (2000).

desempeñaba como profesor de matemáticas de nivel medio superior, mientras que Yolanda es licenciada Físico-Matemática y labora en el sector industrial privado. Los nombres de los estudiantes han sido modificados.

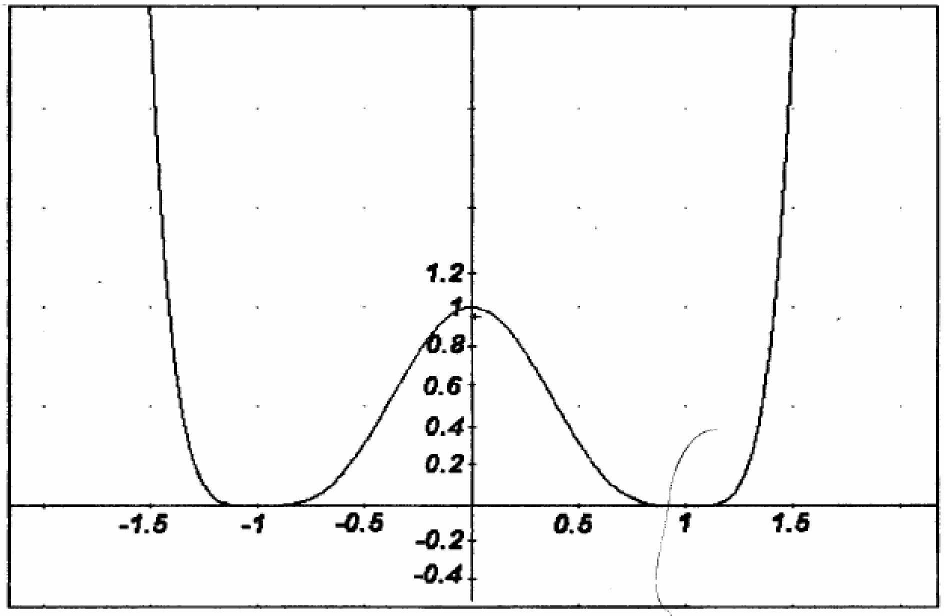
Para realizar el análisis de la interacción, hemos numerado cada una de las intervenciones de los estudiantes en el foro asincrónico; esto nos permitirá referirnos a cualquier enunciación presentada a lo largo de la discusión entre los estudiantes. No todas las enunciaciones que se presentan en el foro proveen información relevante para nuestro análisis, razón por la cual hemos seleccionado sólo las intervenciones que consideramos importantes, sin embargo, si el lector está interesado en revisar la interacción completa, podrá acceder a ésta recurriendo al anexo 1 que se encuentra en la parte final de este escrito. Otro punto que es importante aclarar es que las intervenciones de los estudiantes se exponen tal y como fueron escritas por ellos, esto es, hemos conservado incluso los errores ortográficos con la intención de no modificar la evidencia utilizada para nuestro estudio.

A continuación presentamos la actividad matemática a resolver por los estudiantes, para proceder al análisis de la interacción que generó la resolución de la misma.

3.1. LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Problema I.6

A continuación se muestra la gráfica de una función



Los puntos $\left(-\frac{1}{3},0.62\right),\left(-\frac{1}{4},0.77\right),(0,1),\left(\frac{1}{5},0.85\right)$ están sobre ella.

a) Márcalos

b) Resulta que al evaluar la segunda derivada en x = $-\frac{1}{3}$, x = $-\frac{1}{4}$, x = $\frac{1}{5}$

y x = $\frac{1}{3}$ se obtiene:

$f''\left(-\frac{1}{3}\right)=-1.40$ $f''\left(-\frac{1}{4}\right)=-3.95$ $f''(0)=-8$ $f''\left(\frac{1}{5}\right)=-5.30$

$f''\left(\frac{1}{3}\right)=-1.40$

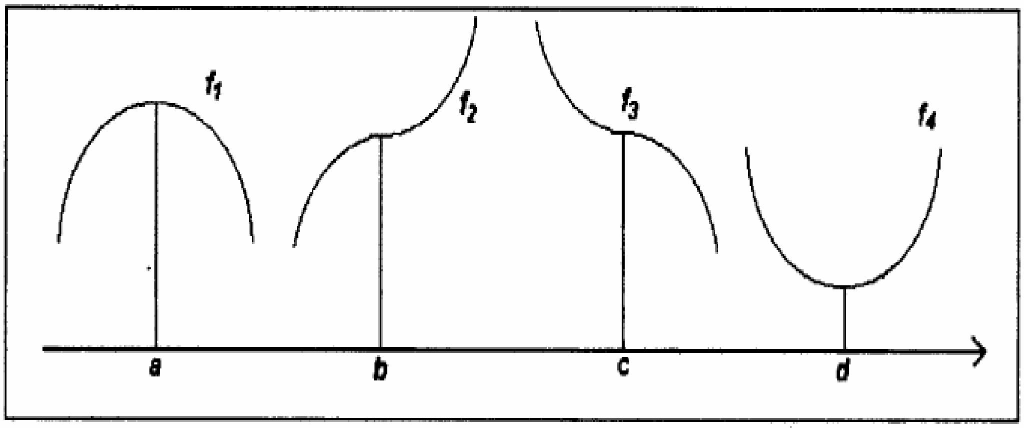
Haciendo un bosquejo analiza la forma que tiene la gráfica en la ventana desde x = $-\frac{1}{3}$ hasta x = $\frac{1}{3}$ y desde y = 0.4 hasta y = 1.2

Respuesta:

Problema I.9

A continuación se presentan varias gráficas.

Nota: Es importante que no asocies ninguna fórmula a las formas dadas.



Contesta las siguientes preguntas explicando tus respuestas:

a) ¿Cómo es el signo de f'_1 antes y después de a?

b) ¿Cuál es el signo de f''_1 antes y después de a?

c) ¿Cómo es el signo de f'_2 antes y después de b?

d) ¿Cuál es el signo de f''_2 antes y después de b?

e) ¿Cómo es el signo de f'_3 antes y después de c?

f) ¿Cuál es el signo de f''_3 antes y después de c?

g) ¿Cómo es el signo de f'_4 antes y después de d?

h) ¿Cuál es el signo de f''_4 antes y después de d?

Respuesta:

Problema I.10

Confirma o refuta las siguientes afirmaciones:

c) La derivada de una cierta función después de un mínimo local es negativa

d) La derivada de una función después de un punto de inflexión siempre es positiva

e) La segunda derivada de una función alrededor de un punto de inflexión es positiva

f) La segunda derivada de una función alrededor de un máximo es negativa

g) El signo de la primera derivada en el punto $x = a$ siempre es el mismo que el signo de la segunda derivada en dicho punto

h) La tercera derivada de toda función siempre se anula

Es importante que expliques tus respuestas; para ayudarte, en cada inciso realiza bosquejos.

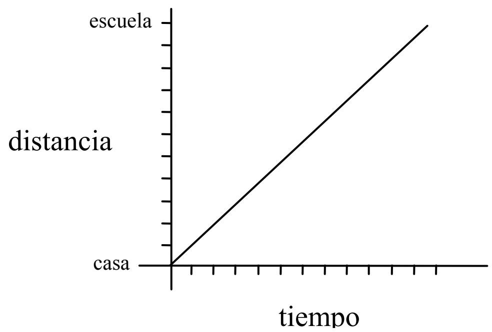
Respuesta:

Caminando hacia la escuela

Actividad 1: un largo camino

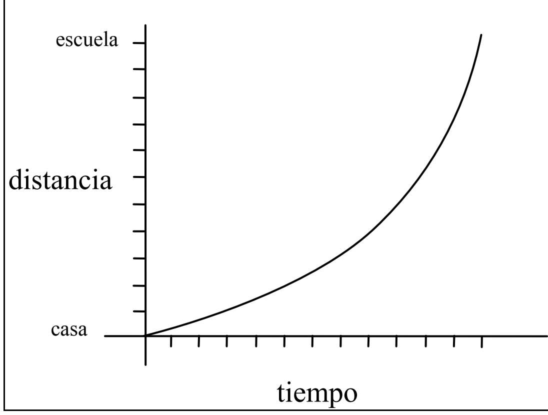
Anahí es una estudiante de segundo grado de secundaria. Al salir de casa para dirigirse a la escuela, camina a *paso constante*, lo que le permite ir avanzando una misma distancia en tiempos iguales.

Esta gráfica describe su recorrido, desde su casa hasta la escuela.



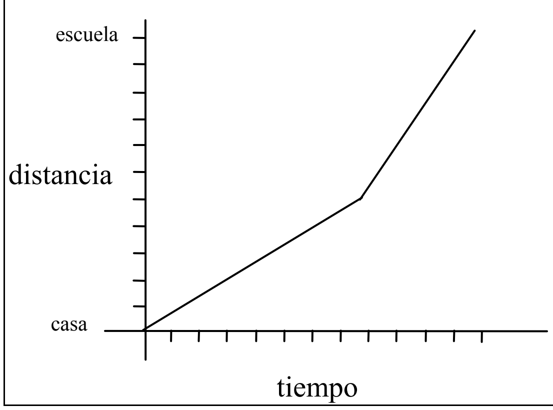
Secuencia 1: modelo

a. En la siguiente gráfica se describe el recorrido que hizo Anahí en otra ocasión. Argumenta cómo fue su avance, ¿qué sucedió?, ¿por qué se generó una curva con esas características? (El tiempo empleado en su recorrido es el mismo)

a1 	

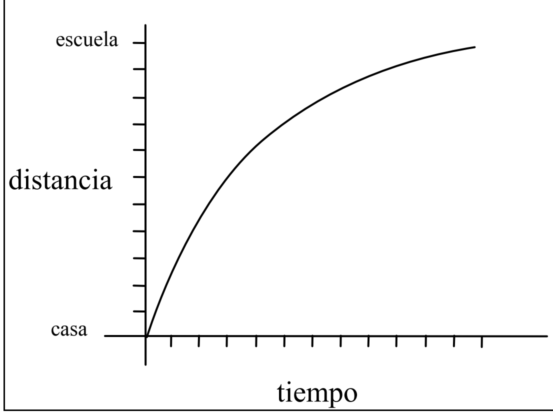
b. La curva que aparece enseguida describe el recorrido que realizó Anahí en otra ocasión. Compara con las respuestas del inciso anterior y explica; cómo fue su avance, ¿qué diferencia notas con la gráfica del inciso anterior?

b1

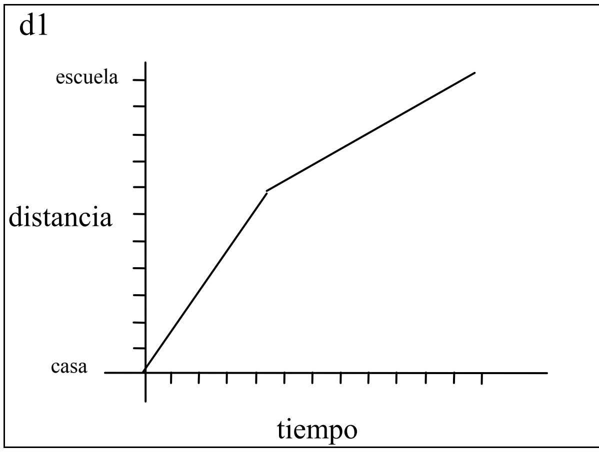


c. Esta es otra gráfica en el recorrido de Anahí desde su casa hasta la escuela. Argumenta cómo fue su avance, ¿qué sucedió?, ¿por qué se generó una curva con esas características? (El tiempo empleado en su recorrido el mismo)

c1



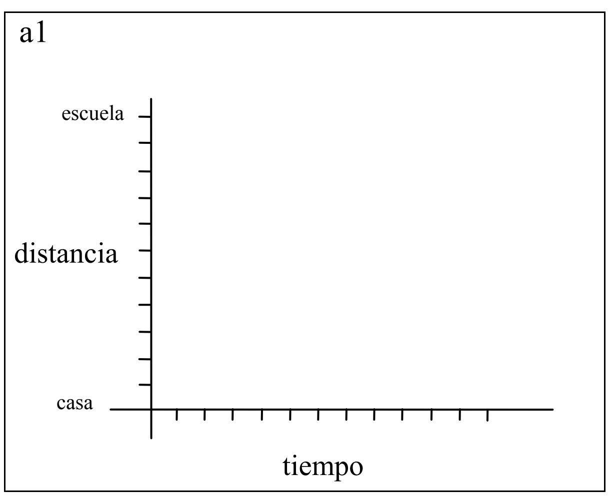
d. En la curva que aparece enseguida se describe el recorrido que realizó Anahí en otra ocasión. Compara con las respuestas del inciso anterior y explica; cómo fue su avance, ¿qué diferencia notas con la gráfica del inciso anterior?



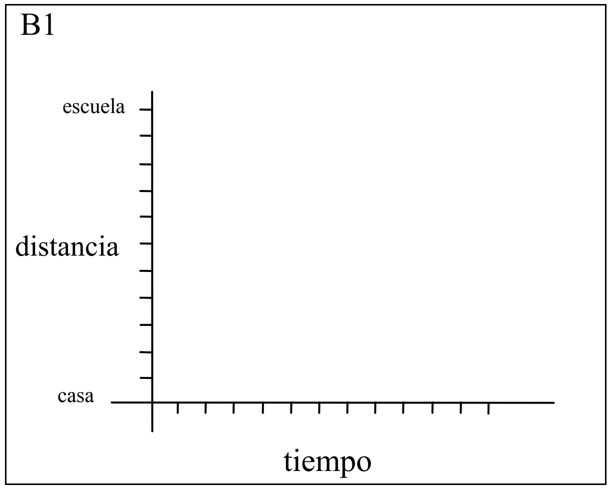
Secuencia 2: verbalizaciones

Para cada caso, dibuja una curva que exprese la situación que plantea Anahí.

a. Al salir de casa empezaban a caer algunas gotitas de agua, por lo que mi avance fue muy rápido, sin embargo a medida que caminaba hacia la escuela me di cuenta que la lluvia dejaba de amenazar por lo que poco a poco disminuí mi velocidad”

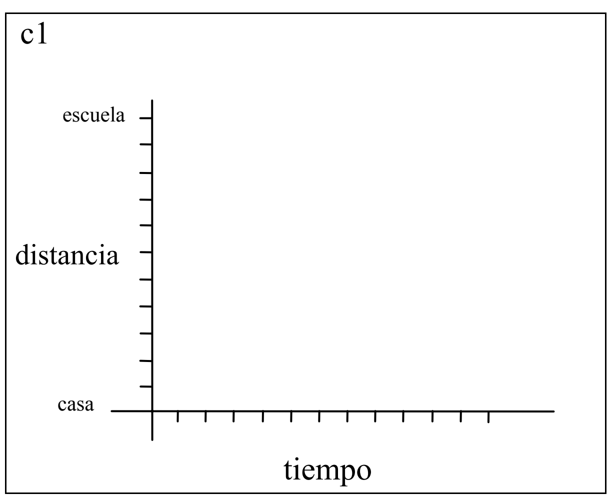


b. "Hoy salí de casa caminando tranquilamente hacia la escuela, sin embargo me acordé que tenía que entregar un libro a la biblioteca además de comprar algunos lápices de color, por lo que empecé a aumentar el paso para llegar antes de la hora de la clase."



c. La escuela donde estudio se encuentra a 800 metros de mi casa, se llega a través de una calle arbolada con una ligera y casi imperceptible inclinación. Hoy decidí ir montada en bicicleta a la escuela, y como la calle casi siempre está vacía no hay peligro alguno.

Al salir de casa, monté la bicicleta y aproveché la pendiente para impulsarme y no pedalear. Al principio iba despacio, pero a medida que avanzaba la velocidad se incrementa. Ya se que al llegar a un viejo roble, que está en el punto intermedio entre mi casa y la escuela, tengo que empezar a frenar para reducir mi velocidad. Así llegué a la puerta de la escuela sin haber pedaleado.



Discusión; algunas preguntas por contestar

a. ¿Qué diferencia percibes en las gráficas, cuando Anahí camina a paso constante y cuando al caminar va aumentando gradualmente su velocidad?

b. Cuando Anahí camina, primero aumentando gradualmente su velocidad y después disminuyendo gradualmente su velocidad, ¿qué tipo de gráfica se genera? (dibuja la gráfica)

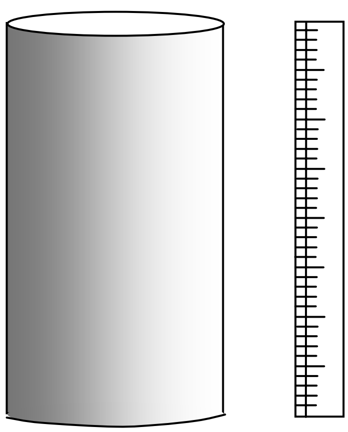
c. ¿Es posible identificar el punto donde después de ir incrementando gradualmente su velocidad, empieza a disminuir gradualmente su velocidad?, ¿qué punto es?, ¿cómo lo llamarías?

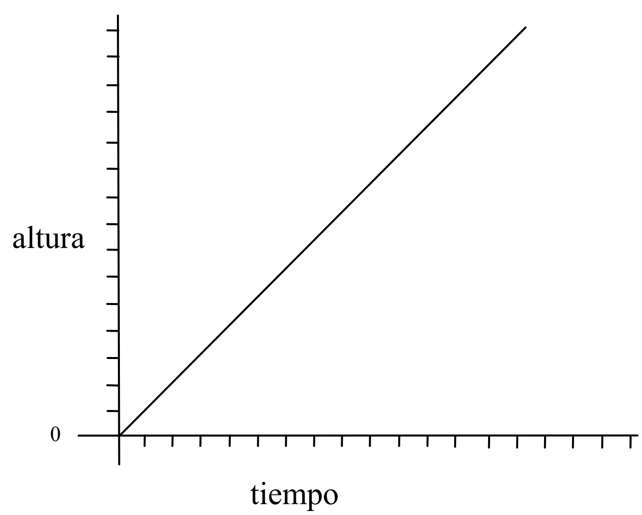
Examinando el llenado de recipientes

Actividad 1: tubos de ensaye

En una experiencia en el laboratorio de química se han llenado algunos recipientes con un cierto líquido. En primer lugar un tubo de ensaye, de forma cilíndrica.

Al verter el líquido de forma constante, la *altura* del recipiente va en aumento. Este fenómeno es registrado en una gráfica en donde tenemos en un eje el tiempo, y en el otro la *altura*.

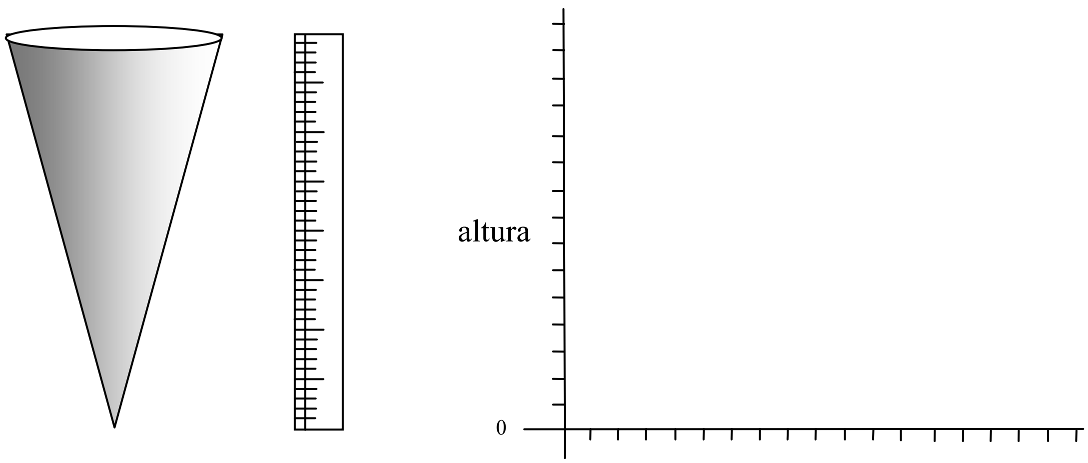




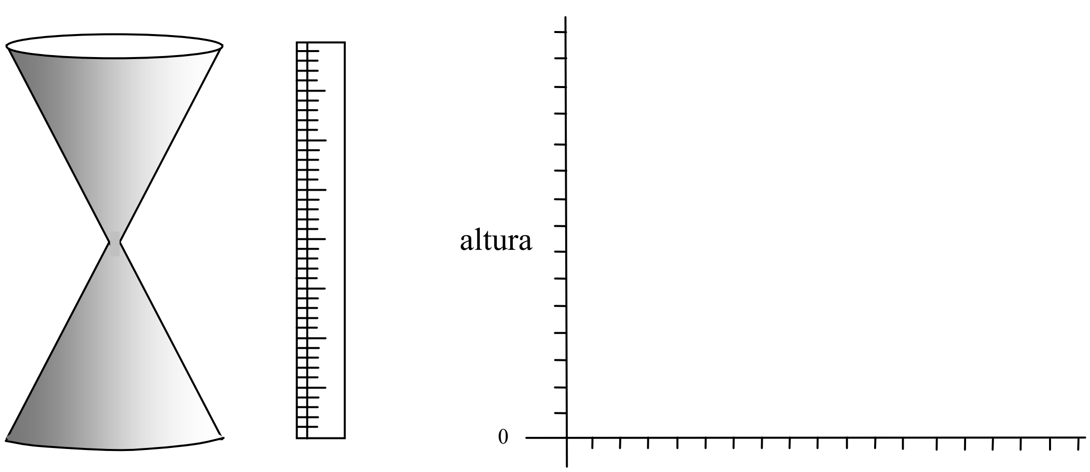
El resultado en la gráfica es una recta, pues por cada unidad de tiempo se alcanza una misma altura.

Secuencia 1 : otros recipientes

a. A continuación aparece otro recipiente de laboratorio al que también se le va a verter el mismo líquido. Bosqueja una gráfica que refleje la altura obtenida respecto al tiempo.

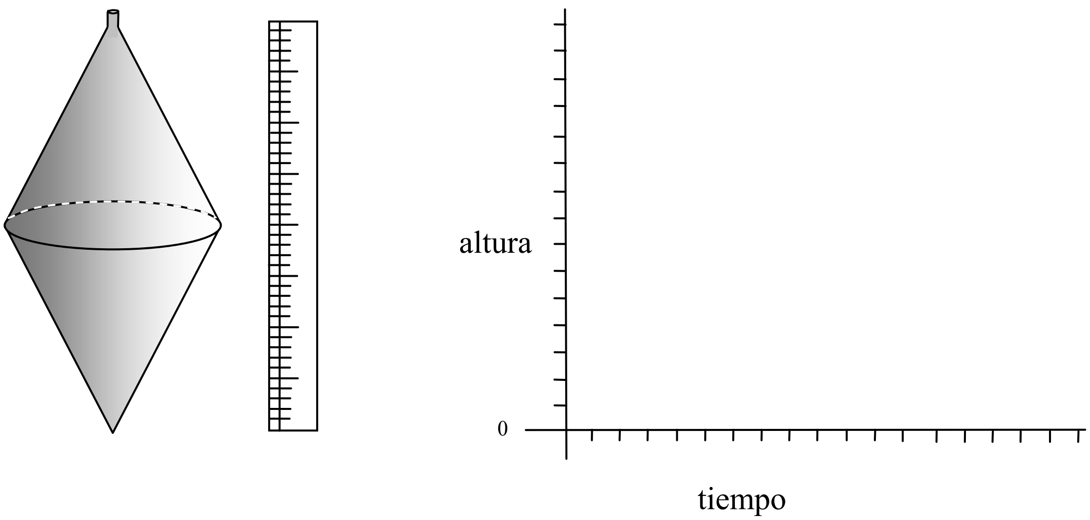


b. El siguiente recipiente es de fabricación especial. Bosque una gráfica que refleje la altura obtenida respecto al tiempo.

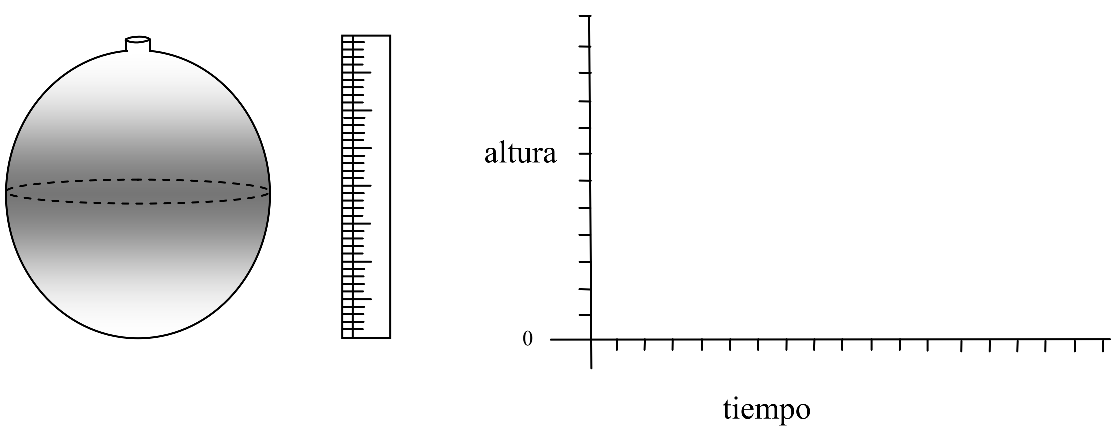


Secuencia 2: nuevas exploraciones

c. Bosqueja una gráfica que refleje la altura obtenida respecto al tiempo, cuando es llenado el siguiente recipiente con cierto líquido.



d. Bosqueja una gráfica que refleje la altura obtenida respecto al tiempo, cuando es llenado el siguiente recipiente con cierto líquido.



Discusión; velocidad de llenado

d. En el recipiente del inciso "*a*" ¿con qué velocidad alcanza nueva *altura*? (considera tres inspecciones distintas; al iniciar su llenado, al llevar la mitad del recipiente y al alcanzar la altura máxima, esto es justo en la boquilla)

a1

a2

a3

e. En el recipiente del inciso "*b*" ¿con qué velocidad alcanza nueva *altura*? (considera tres inspecciones distintas; al iniciar su llenado, al llevar la mitad del recipiente y al alcanzar la altura máxima, esto es justo en la boquilla)

b1

b2

b3

f. Qué rasgo o rasgos comunes pueden observarse en las gráficas de los incisos *c* y *d*.

c1

g. ¿Cuál es el efecto en la gráfica cuando el líquido que se vierte en los recipientes se acerca a la altura media?

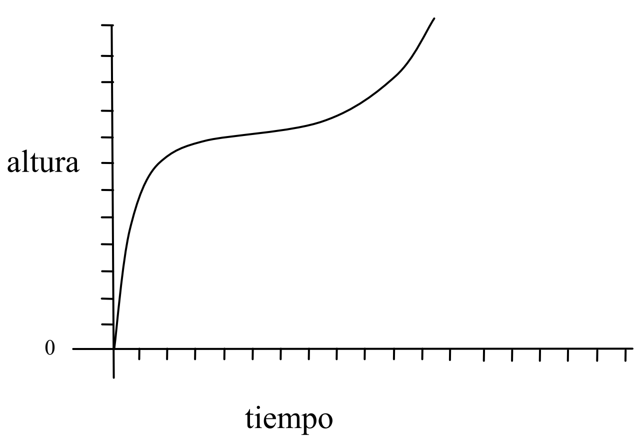
d1

h. ¿Cuál es el efecto en la gráfica cuando el líquido que se vierte en los recipientes alcanza la altura media?

e1

Secuencia 3: planteamiento de un escenario

a. Se ha vertido agua a un contenedor, generándose una gráfica de altura contra tiempo como la que se muestra a continuación. Utilizando esta información, dibuja un bosquejo de la forma del contenedor.



3.2. EL ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN

Para realizar el análisis de la interacción, hemos dividido la conversación de los estudiantes en bloques. Cada uno de éstos corresponde a cada una de las partes de la actividad abordada por los estudiantes. Posterior a la presentación de estos extractos de la conversación hemos colocado una tabla correspondiente a cada uno de estos bloques de análisis en los que se muestran el foco pronunciado, atendido y proyectado que hemos identificado en las enunciaciones de los estudiantes. Estas tablas nos permiten concentrar la información obtenida, así como realizar nuestro análisis en una forma organizada.

Pasemos pues al primer extracto de la conversación:

[17] **Pablo:** pues antes de hacer la gráfica en el problema 1.6 se logra observar que todos los puntos son negativos, por lo que se cumple que

[18] **Pablo:** que cuando una función es concava hacia abajo, es decir

[19] **Pablo:** dirige su concavidad hacia la parte negativa de las y

[20] **Yolanda:** Buen, a mi me ayudo la gráfica, de entrada te dice mucho, ya cuando la pones en el intervalo, pues no consideras como funciona por otro lado, y se refuerza la información cuando nos dicen que las segundas derivadas, en todos los puntos que nos mencionan son negativas

[21] **Pablo:** por otro lado si te das cuenta mientras la función crece hacia las "y" positivas y luego decrece, su segunda derivada en este caso hace lo contrario

[22] **Yolanda:** No, lo que te da la dirección de la concavidad es la segunda derivada, lo que la hace negativa es la función

[23] **Yolanda:** Si te fijas en los puntos, -1/3 y 1/3, ambas tienen, gráficamente el mismo valor en y

[24] **Yolanda:** y el mismo signo en la segunda derivada

[25] **Yolanda:** por los datos evaluados ya dados por el problema

[26] **Pablo:** si lo que confirma lo que te dije

[27] **Pablo:** mientras la funcion original crece simetricamente, parece que la segunda derivada decrece tambien de la misma forma

Número de Expresión	**Foco Pronunciado**	**Foco Atendido**	**Foco Proyectado**
[17] [18] [19]	pues antes de hacer la gráfica en el problema 1.6 se logra observar que todos los puntos son negativos, por lo que se cumple que que cuando una función es concava hacia abajo, es decir dirige su concavidad hacia la parte negativa de las y	▪ Valores de *f* '' para $\pm\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, 0 y $\frac{1}{5}$ ▪ Forma de la gráfica de la función en el intervalo [-1,1]	Relación entre el signo de *f* '' y la orientación de la concavidad de la gráfica de *f*
[20]	Buen, a mi me ayudo la gráfica, de entrada te dice mucho, ya cuando la pones en el intervalo, pues no consideras como funciona por otro lado, y se refuerza la información cuando nos dicen que las segundas derivadas, en todos los puntos que nos mencionan son negativas	▪ Gráfica de la función *f* ▪ Valores de *f* '' para $\pm\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, 0 y $\frac{1}{5}$	?
[21]	por otro lado si te das cuenta mientras la función crece hacia las "y" positivas y luego decrece, su segunda derivada en este caso hace lo contrario	▪ Comportamiento gráfico de *f* en el intervalo [-1, 1] ▪ Valores de *f* '' para $\pm\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, 0 y $\frac{1}{5}$	Comportamiento gráfico de *f* ''
[22]	No, lo que te da la dirección de la concavidad es la segunda derivada, lo que la hace negativa es la función	?	Discrepancia con Pablo
[23] [24] [25]	Si te fijas en los puntos, -1/3 y 1/3, ambas tienen, gráficamente el mismo valor en y y el mismo signo en la segunda derivada por los datos evaluados ya dados por el problema	▪ Gráfica de *f* ▪ Valor de *f* '' para $\pm\frac{1}{3}$	?
[26] [27]	si lo que confirma lo que te dije mientras la funcion original crece simetricamente, parece que la segunda derivada decrece tambien de la misma forma	▪ Valores de *f* '' para $\pm\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, 0 y $\frac{1}{5}$ ▪ Comportamiento gráfico de *f* en el intervalo [-1, 1]	Comportamiento gráfico de *f* ''

Tabla 1. Análisis Focal correspondiente al bloque del problema I.6

En la tabla anterior, podemos apreciar cómo Pablo es capaz de justificar la forma que presenta la gráfica de f en el intervalo [-1, 1] en términos del signo que presenta f'' al ser evaluada precisamente en valores contenidos en este intervalo ([17]-[19]).

Otro aspecto que es importante destacar, es el hecho de que muchas veces los datos que tenemos a la mano no son suficientes para poder interpretar cada uno de los focos que el estudiante está manifestando en un momento particular de la interacción como sucede en [20], [23]-[25], donde es posible ver que Yolanda manifiesta una opinión no compatible con la de Pablo, y a pesar de que identificamos el foco atendido en las enunciaciones [23]-[25], la información no es suficiente para interpretar la idea que desea proyectar y de esta manera intentar comprender el sentido de la afirmación expresada en [22].

El análisis anterior nos muestra también que Pablo reconoce un patrón en el comportamiento gráfico de f'' similar al de f en [-1, 1] en el sentido de que ambos son simétricos con respecto al eje de las ordenadas (ver [21], [26] y [27]).

Pasaremos ahora al bloque de la conversación correspondiente al problema I.9:

[33] **Yolanda:** Aahhh, Bien. Pasamos al 1.9?

[34] **Pablo:** si

[35] **Pablo:** aqui me asalto una duda

[36] **Yolanda:** ???

[37] **Pablo:** fijate bien en la función a y parece un semicirculo y no una parábola

[38] **Yolanda:** Sí

[39] **Pablo:** y me pregunte si le permito un crecimiento mayor dejara de ser función en algun momento????

[40] **Pablo:** pienso que probablemente si

[41] **Pablo:** y tu????

[42] **Yolanda:** Puede ser, pero no hay ningún problema, pues lo analizas por partes

[43] **Yolanda:** Te fijas en los intervalos, si es función o no,

[44] **Yolanda:** Suponte que sea una circunferencia

[45] **Yolanda:** y la tienes completa

[46] **Yolanda:** Bueno, pues no puedes hacer la gran cosa, pue sno es función

[47] **Yolanda:** La forzas a que no lo sea, ¿cómo?, limitándola

[48] **Yolanda:** El definir un intervalo te ayuda a resolver problemas

[49] **Yolanda:** como este

[50] **Yolanda:** Ahora, que pensandolo unpoco

[51] **Yolanda:** Hay muchas cosas que hacen los ingenieros, que están mal

[52] **Pablo:** creo que tienes razón pero como lo separas

[53] **Pablo:** ???

[54] **Yolanda:** i.e., matematicamente mal, pero como les funcionan practicamente, lo hacen

[55] **Pablo:** que es i.e???

[56] **Yolanda:** i.e.= es decir; tambien podemos usar v.g.: por ejemplo,.

[57] **Yolanda:** Corrección v.gr., verbigracia

[58]**Pablo:**gracias

La anterior es una situación de formulación, en la que los estudiantes (Pablo en particular) expresan inquietudes provocadas por una situación previa de acción sobre la actividad matemática (ver [35], [37] y [39]). Esto nos hace reflexionar sobre el efecto de las representaciones gráficas en el foco atendido y las implicaciones que puede tener sobre el foco proyectado, esto es; una representación gráfica puede influir de manera determinante la interpretación que da un estudiante a una determinada situación matemática. Como podemos apreciar en el extracto anterior, el foco atendido por Pablo en [37] es la gráfica f_1 del problema I.9 y el efecto de ésta lo podemos mirar en las enunciaciones [37] y [39] donde Pablo parece dudar si la gráfica corresponde realmente a una función o no. Consideramos que una representación gráfica no adecuada puede ocasionar interpretaciones erróneas en los estudiantes.

Otro punto que nos parece muy importante de señalar es cómo en esta etapa de la interacción se comienza a conformar un lenguaje con códigos lingüísticos ajenos a la comunicación verbal como por ejemplo el uso de símbolos como = ó ???, o el uso de abreviaciones como i.e ó v.gr. El proceso de esta conformación del lenguaje es interesante porque algunas veces se lleva a cabo en forma explícita ([54] - [58]) y en otros casos se realiza la apropiación de símbolos en forma implícita, como en [36] donde Yolanda utiliza el símbolo ??? y más adelante Pablo utiliza este mismo símbolo en [53] sin que previamente se haya llegado a un acuerdo explícito sobre su significado.

El siguiente bloque corresponde también a la discusión generada al enfrentar el problema I.9. Como veremos posteriormente, el análisis focal del mismo nos revela información acerca de los contextos utilizados por los estudiantes al enfrentar esta actividad.

[72] **Yolanda:** POr lo demas, pues no presentan grandes problemas

[73] **Pablo:** si, claramente se observa que en la función 1 mientras la primera derivada antes de a es positiva, despues de a en negativa

[74] **Pablo:** y la segunda derivada todo el tiempo es negativa

[75] **Yolanda:** Si, así es. ¿cómo sería la tercera derivada de esto?

[76] **Yolanda:** Tienes alguna idea?

[77] **Pablo:** no

[78] **Yolanda:** Esa pregunta a mi mecauso problemas

[79] **Pablo:** y tú??

[80] **Pablo:** pero esperame tantito y te contesto

[81] **Yolanda:** Lo único que puedo saber de la tercera derivada es que vas disminuyendo de grado la ecuación

[82] **Yolanda:** 8:40, que no significa nada, pero solo para saber qué ritmo llevamos (??)

[83] **Pablo:** vamos bien

[84] **Yolanda:** Bien

[85] **Pablo:** fijate que cuando observamos encontrar un punto de inflexion

[86] **Pablo:** tenemos que resolver la segunda derivada hallando valores dex

[87] **Pablo:** y luego esos valores sustituirlos en la tercera derivada

[88] **Pablo:** y las raices que no anulan a la tercera derivada hay inflexión

[89] **Yolanda:** SI, ya sé a qué método te refieres, te vas fijando en los cambios de signos

[90] **Pablo:** aja

[91] **Pablo:** en este caso ocurren cosas interesantes

[92] **Yolanda:** Por alguna causa, no me gustan esos métodos

[93] **Pablo:** fijate la f1

[94] **Yolanda:** qué hay con ella?

[95] **Pablo:** si fuera cuadratica su tercera derivada

[96] **Pablo:** seria cero

[97] **Yolanda:** Sí, así es

[98] **Pablo:** por lo que inmediatamente nos damos cuenta que no hay punto de inflexión

[99] **Pablo:** pero y si fuera una función con exponente 4 o cualquiera con exponente par mayor que dos

[100] **Pablo:** entonces si tendriamos que analizar y utilizar el metodo antes mencionado

[101] **Pablo:** y encontrariamos que cada raíz de la segunda derivada

[102] **Yolanda:** Sí,tienes razón

[103] **Pablo:** anularia la tercera derivada

[104] **Yolanda:** A lo que me refiero es que, este analisis es gráfico, el que pide el problema 1.9, para hacer lo que dices, deberíamos tener la función ya conocida

[105] **Pablo:** si

[106] **Pablo:** y que deduces de ella

[107] **Yolanda:** Gráficamente, no me parece fácil, de hehco, yo no puedo decir nada, sobre la tercera derivada

Como se puede observar, en esta parte de la interacción los estudiantes intercambian ideas sobre el concepto de tercera derivada de una función, a pesar de que esta pregunta no está incluida en la actividad a resolver. La dificultad de realizar representaciones gráficas que ambos estudiantes expresan al afrontar problemáticas que involucran el concepto de tercera derivada en [75] – [78] y [107] han sido reportadas en previas investigaciones sobre pensamiento y lenguaje variacional en un contexto gráfico:

> "Empero la cuarta cuestión [determinar dónde $f'''>0$] plantea una problemática no prevista por ellos, el éxito en la pregunta radica en poder descifrar los códigos variacionales y articularlos en signos variacionales , pues la respuesta habrá de ser construida" (Cantoral & Farfán, 1998, p. 361)

El Análisis Focal, nos permite obtener información no evidente de las expresiones escritas formuladas por los estudiantes y que puede ser de gran utilidad para comprender el desarrollo de la interacción. Veamos por ejemplo el Análisis Focal de algunas de las expresiones emitidas por Pablo, así como nuestra interpretación de este análisis:

Número de Expresión	**Foco Pronunciado**	**Foco Atendido**	**Foco Proyectado**
[73]	si, claramente se observa que en la función 1 mientras la primera derivada antes de a es positiva, despues de a en negativa	Gráfica f_1	Valor de la primera derivada determinado por los signos de las pendientes de las rectas tangentes a la curva
[74]	y la segunda derivada todo el tiempo es negativa	Gráfica f_1	Valor de la segunda derivada determinado por la forma de la concavidad de la gráfica
[95]	si fuera cuadratica su tercera derivada	Gráfica f_1	Ecuación de segundo grado asociada a f_1
[96]	seria cero	Derivación sucesiva de la ecuación de segundo grado asociada a f_1	Valor numérico de f'''
[98]	por lo que inmediatamente nos damos cuenta que no hay punto de inflexión	Imposibilidad de aplicación del algoritmo	Ausencia del punto de inflexión

Tabla 2. Análisis Focal correspondiente al bloque del problema I.9

El Análisis Focal de las intervenciones de Pablo referentes al concepto de derivada nos revela una inclinación por parte de esta persona hacia los aspectos gráficos del concepto. Si analizamos el foco atendido en cada una de sus intervenciones mostradas en la tabla anterior, veremos que en la mayoría de los casos su atención se centra en aspectos visuales, y cuando no lo hace, como en el caso en que se refiere a f''' (ver [96]), es capaz de regresar al registro gráfico (ver [98]) para comparar la información obtenida en el plano algebraico y obtener conclusiones. El lector podría argumentar que la razón por la que Pablo se centra en los aspectos visuales es que el problema a resolver se encuentra planteado en términos gráficos (ver problema I.9 del apéndice), sin embargo consideramos que esto no es necesariamente cierto, ya que a pesar de que el problema en cuestión en efecto requiere de un manejo de los aspectos gráficos de la problemática, parece ser que el concepto de tercera derivada no es tan fácilmente abordable desde un aspecto gráfico como nos muestra Yolanda en [81] y [107].

A pesar de que Pablo presenta cierta fortaleza en el manejo de contextos gráficos y su traslación a contextos algebraico-numéricos, en el plano algorítmico esta fortaleza se ve disminuida. Esta hipótesis se refuerza cuando este estudiante incursiona al plano algorítmico proponiendo un método para el cálculo de puntos de inflexión erróneo ([85]-[88]), sin embargo, la capacidad de Pablo de trasladarse entre contextos, le permite reflexionar sobre su error algorítmico como se muestra a continuación:

[111] **Pablo:** entonces veriamos que mientras a y d presentan terceras derivadas anuladas es decir igual a cero

[112] **Pablo:** b y c serian funciones ..

[113] **Pablo:** que presenten una linealidad

[114] **Pablo:** es decir el analisis lo hago

[115] **Pablo:** partiendo de que una es la derivada de la anterior

[116] **Pablo:** y asi va cambiando el tipo de función en forma gradual

[117] **Pablo:** es decir su exponente disminuye

[118] **Pablo:** con forme derivamos

[119] **Yolanda:** Entiendo los tres ultimos mensajes, no lo anterior, qué quiere decircon que b y c presentan linealidad?

[120] **Pablo:** si fijate que si la función fuera cubica su tercera derivada sería una recta paralela al eje x

[121] **Yolanda:** Sí, así es

[122] **Yolanda:** Estoy buscando excel una posible función

[123] **Pablo:** por lo que surge otra duda ahora que lo mencionas

[124] **Yolanda:** ????

[125] **Pablo:** esto indicaria que ningún valor de la segunda derivada

[126] **Pablo:** anularia a la tercera derivada

[127] **Pablo:** por lo que todos los puntos te indican inflexión

[128] **Pablo:** ????

Número de Expresión	Foco Pronunciado	Foco Atendido	Foco Proyectado
[111]	entonces veriamos que mientras a y d presentan terceras derivadas anuladas es decir igual a cero	Gráficas f_1 y f_4	Valor numérico de f''' para alguna función de segundo grado asociada a las gráficas f_1 ó f_4
[112] [113]	b y c serian funciones... que presenten una linealidad	Gráficas f_2 y f_3	Representación gráfica de f''' para alguna función de tercer grado asociada a las gráficas f_2 ó f_3
[116] [117]	y asi va cambiando el tipo de función en forma gradual es decir su exponente disminuye	Derivación sucesiva de la ecuación cúbica asociada a f_2 ó f_3	Disminución del grado de la ecuación
[120]	si fijate que si la función fuera cubica su tercera derivada sería una recta paralela al eje x	Tercera derivada de la ecuación cúbica asociada a f_2 ó f_3	Representación gráfica de f'''
[125] [126]	esto indicaria que ningún valor de la segunda derivada anularia a la tercera derivada	Valor numérico constante de f''	Ausencia de los puntos de inflexión como resultado de la aplicación del algoritmo
[127]	por lo que todos los puntos te indican inflexión	Representación gráfica del resultado obtenido en el algoritmo	Contradicción

Tabla 3. Análisis Focal correspondiente al bloque del problema I.9

La tabla anterior nos muestra cómo es que Pablo continúa dándole una interpretación gráfica a la tercera derivada, que mejor ejemplo que su concepto de ‘linealidad’. No obstante, al intentar explicar este concepto a Yolanda ([114] – [120]), Pablo es hábil para transitar entre contextos gráficos, algebraicos y algorítmicos; y esta habilidad es la que le permite percibir una contradicción en el algoritmo propuesto al interpretar los resultados obtenidos en un plano visual (ver [127], [128]).

Otra situación presente en el anterior segmento de la conversación que queremos destacar, es la posible influencia que puede generar en las respuestas y mensajes del estudiante la interacción con elementos propios de la Educación a Distancia; en este caso nos estamos refiriendo a la expresión [122], que nos revela cómo uno de los estudiantes emplea un software computacional como auxiliar en la resolución de la problemática en cuestión. Este tipo de elementos tecnológicos sobre los que el estudiante actúa y de los cuales recibe una retroalimentación influyen directamente en la forma en que el estudiante percibe una entidad matemática, en este caso una función particular. En otras palabras, el papel de la tecnología incide directamente en el foco atendido de los estudiantes, y como consecuencia debe influir en su foco proyectado.

De la misma manera en que Pablo muestra cierta fortaleza para trabajar los aspectos visuales de los problemas propuestos, Yolanda parece tener deficiencias en este aspecto. Miremos el siguiente extracto de la interacción:

[143] **Yolanda:** Como?, no hay punto de inflexión en algunas ecuaciones cuadraticas?

[144] **Pablo:** no no lo hay

[145] **Pablo:** o si????

[146] **Yolanda:** Y la parabola?

[147] **Yolanda:** no tiene un maximo o un minimo

[148] **Pablo:** si pero eso es otra cosa

[149] **Pablo:** se dice que existe un punto de inflexión

[150] **Pablo:** cuando la función cambia su concavidad

[151] **Pablo:** y una parabola siempre sera concava o convexa según sea el caso

[152] **Yolanda:** En verdad?, no me acuerdo de esa definición, yo pensaba que estaba en función del signo de la primera derivada

[153] **Pablo:** no

[154] **Yolanda:** Pero seguramente tienes razón, hace mucho tiempo que toco esos temas

[155] **Yolanda:** y las definiciones posiblemente las esté confundiendo

[156] **Yolanda:** Correción: hace tiempo que NO toco esos temas

La anterior es una situación de validación en la que Yolanda cede sin mayor cuestionamiento a la explicación de Pablo, seguramente por su debilidad en el manejo de ‘definiciones’ como ella misma expresa. Esta condiciones, en las que uno de los opositores cede a la argumentación de su compañero durante un proceso de validación por falta de elementos para plantear una refutación se vuelve a presentar en el extracto que a continuación presentamos. Lo interesante de la siguiente situación es que el proponente convence al oponente de la veracidad de su argumento a pesar de que éste es erróneo:

[176] **Yolanda:** ¿Qué argumento diste en le problema 1.10 (f)?

[177] **Pablo:** en el inciso c, falso despues de un minimo local es positiva

[178] **Yolanda:** Y en el f?

[179] **Pablo:** conteste que esto es cierto

[180] **Yolanda:** y por que?

[181] **Pablo:** pues debido a la concavidad, lo que comentabamos anteriormente

[182] **Pablo:** ya que cuando una función tiene un máximo, su concavidad

[183] **Yolanda:** A mi me dio por hacer la demostración de que si la segunda derivada es negativa hay un maximo local y la concavidad es hacia abajo

[184] **Pablo:** es hacia la parte negativa del eje y

[185] **Pablo:** y cómo lo hiciste????

[186] **Yolanda:** Al tener f un máximo local en un punto a, tenemos que f' = 0, si ocupamos la definición de derivada:

[187] **Yolanda:** Correción: esta máquina ciertas combinaciones las interpreta con esos signos. Al tener f un maximo local en unpunto a, tenenmos que f' = 0, si ocupamos la definición de derivada, i.e.,

[189] **Yolanda:** f'' = lim f'(a+h)/h

[190] **Yolanda:** esa carita es (a)

[191] **Pablo:** si no te preocupes

[192] **Yolanda:** continuo, supongamos f''(a) < 0, entonces[f' (a+ h)/h] < 0, esto implica dos cosas

[193] **Yolanda:** 1) f' (a + h)/h >0, para h <0, esto implica que f decrece antes de a

[194] **Yolanda:** 2) f'(a+h)/h < 0, para h > 0, esto implica que f crece antes de a

[195] **Yolanda:** de lo anterior, f tiene un máximo local en a

[196] **Yolanda:** qué tal?, me aluciné?

[197] **Pablo:** siiiiii

[198] **Pablo:** muy bien

El Análisis Focal aplicado anteriormente a las expresiones realizadas por Pablo, muestran su tendencia a analizar y argumentar los problemas en cuestión desde una perspectiva gráfica. En este caso, podemos apreciar como los argumentos de Pablo se siguen desarrollando en el plano visual (ver [181], [182] y [184]); Yolanda en cambio, expone un argumento analítico (el cual es natural dada su formación profesional) el cual Pablo es incapaz de refutar. Creemos que Pablo también posee deficiencias en el aspecto analítico, ya que de lo contrario se hubiera percatado de los errores evidentes que Yolanda comete durante su argumentación, como por ejemplo la escritura incorrecta del numerador en la expresión [189] por mencionar alguno de los errores más evidentes. Yolanda convencida de la veracidad de su argumento, logra convencer a Pablo ([198]) dentro de un contexto analítico, el cual evidentemente Pablo no domina.

Como se mencionó al inicio de este capítulo, uno de los objetivos de la secuencia didáctica es dar una resignificación al concepto de derivada desde una particular visión, así como encontrar las dificultades que obstaculizan la construcción de esta noción. Podemos apreciar cómo durante la interacción entre los estudiantes, éstos son capaces de asociar al concepto de primera y segunda derivada representaciones en contextos algebraicos y gráficos principalmente, tales como la pendiente, concavidad y disminución del grado de la función al aplicársele el algoritmo de la derivación; mientras que las dificultades mayores se presentan al intentar dar una representación al concepto de tercera derivada

Aquí hemos finalizado el análisis de la interacción entre Yolanda y Pablo. Como hemos mencionado previamente, la interacción completa entre estos estudiantes puede consultarse en el anexo 1 que se encuentra en la parte final de este trabajo.

En el siguiente capítulo presentaremos el análisis de otra interacción entre estudiantes que se enfrentan a otra situación matemática, utilizando otra herramienta de comunicación, la cual estudiaremos utilizando otra herramienta metodológica de análisis.

CAPÍTULO 4

EL CASO DE LAS TRANSFORMACIONES GRÁFICAS

El caso que enseguida presentaremos, posee un característica que lo hace diferir del caso presentado en el capítulo 3: la interacción registrada se desarrolla de manera espontánea entre los miembros de un equipo de trabajo, alrededor de una tarea matemática designada por el profesor, haciendo uso de uno de los recursos de comunicación disponibles en la plataforma de trabajo: el foro asincrónico.

Dadas las características de los foros asincrónicos, las intervenciones hechas por los participantes de una discusión son de una naturaleza diferente a las realizadas en un foro sincrónico. Como veremos más adelante, las características de las contribuciones escritas a la discusión coinciden con las reportadas en investigaciones previas (Oktaç, 2001; Montiel, 2002; Lapadat, 2002), en el sentido de que las intervenciones de los participantes en foros asincrónicos son menores en cantidad en comparación con las expuestas en un foro sincrónico, pero con mayor profundidad en cuanto a contenido y análisis, debido a que los participantes de la discusión no se encuentran sujetos a los requerimientos de velocidad de respuesta presentes en una discusión en tiempo real. Debido a estas características y con la finalidad de facilitar un análisis organizado de esta interacción asincrónica, hemos dividido (al igual que en el caso presentado en el capítulo anterior) las intervenciones de los estudiantes en párrafos numerados. Esta numeración es la continuación de la empleada en el capítulo previo, para evitar confusiones que se pudieran presentar al referirnos a dos enunciaciones etiquetadas con un mismo número. Esto además nos dará la oportunidad de referirnos a partes específicas de las intervenciones de cada uno de los estudiantes en el foro asincrónico durante el proceso de análisis de los datos.

En la interacción que analizaremos en este capítulo participan tres estudiantes: Pablo, al que hemos presentado en la interacción del capítulo anterior; Juan, que es profesor de educación media en Uruguay y Luis quien se desempeña como profesor de Física y matemáticas en el nivel medio superior.

La actividad discutida durante la interacción asincrónica involucra el análisis de comportamientos gráficos de funciones polinomiales a través de la manipulación de las constantes numéricas contenidas en las representaciones algebraicas de las funciones en cuestión. La finalidad de la actividad matemática es que los estudiantes sean capaces de transitar entre contextos gráficos y algebraicos, por medio de la identificación del efecto que produce la manipulación de una valor numérico contenido en una expresión algebraica, en la representación gráfica de esta expresión. El tipo de actividades contenidas en la tarea matemática resuelta por los estudiantes la cual mostraremos a continuación, nos parece de la misma clase que las tratadas en uno de los capítulos del trabajo de Cantoral & Montiel (2001), es por esto que hemos decidido nombrar a este episodio de nuestro análisis de datos como *el caso de las transformaciones gráficas*.[8]

La tarea matemática a la que hacemos referencia es la siguiente:

4.1. LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

[8] Ver Cantoral & Montiel (2001), Capítulo 4: *Método de las transformaciones*.

ACTIVIDAD A1

Nota introductoria

Mediante el uso de una calculadora graficadora o con un programa graficador para computadora realice las siguientes actividades. Hemos colocado el programa GRAPHMATICA en la Plataforma por si se desea usarlo (SETUP.EXE) el cual deberá primero bajarlo a su computadora y después ejecutarlo. En este programa x^2 puede ser escrito como $x*x$. Si desea enviarnos gráficas hechas en lápiz y papel le sugerimos que utilice un scanner y guarde las imágenes formato JPG de baja resolución y después insertarlas en un documento en Word. El programa GRAPHMATICA también permite pasar imágenes a Word a través de la opción “Copy-Graphs” de la barra de herramientas (una vez hecho esto en Word tiene que elegir la opción “Pegar” del menú “Edición”)

Actividad A1.1

A1.1.1. Estudie los efectos gráficos de que sufre la ecuación $y = x^n$ al variar el parámetro n (= 1, 2, 3, 4, ...).

A1.1.2. Explique los motivos que hacen que sucedan tales efectos. **Sugerencia**: Estudie lo que sucede con un número al ser elevado a una potencia.

Actividad A1.2

A1.2.1. Con la calculadora estudie los efectos gráficos que sufre la gráfica de la función $y = Ax + B$ al variar el parámetro *A*.

Sugerencia: Una manera de organizar el estudio es dejar fijo un parámetro mientras varía el otro.

A1.2.2. Elabore explicaciones de los motivos de tales efectos gráficos. **Sugerencia**: Recuerde la definición de gráfica de una ecuación y analice “lo que le sucede a *x* para llegar a ser *y* ”. Es decir, estudie las transformación: $x \to A + Bx$.

Actividad A1.3

Realice lo mismo que en A1.2 con las siguientes ecuaciones. Es decir, estudie los efectos gráficos de variación de parámetros A, B, C, D y E, y elabore explicaciones de los motivos de tales efectos gráficos:

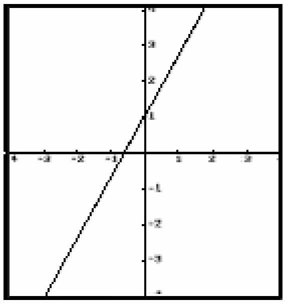
A1.3.a) $y = A + Bx + Cx^2$

A1.3.b) $y = A + Bx + Dx^3$

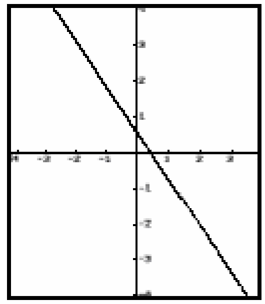
A1.3.c) $y = A + Bx + Cx^2 + Ex^4$

Actividad A1.3

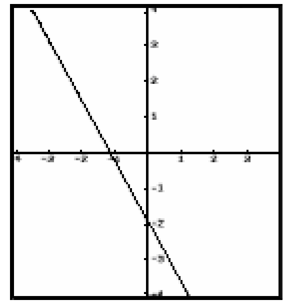
Con los hallazgos que realizó en las actividades anteriores, asigne una ecuación a las siguientes gráficas.



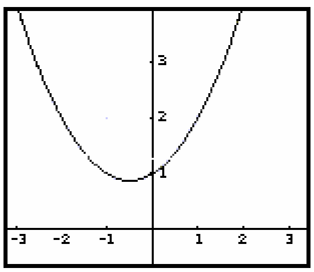
A



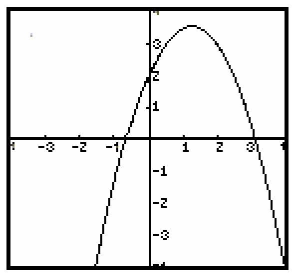
B



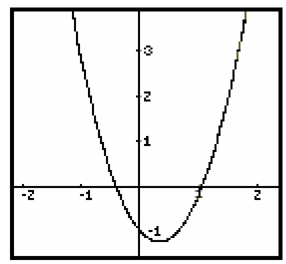
C



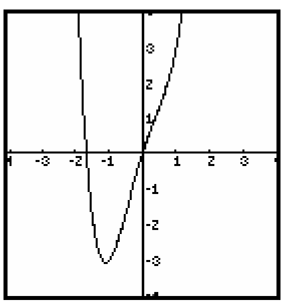
D



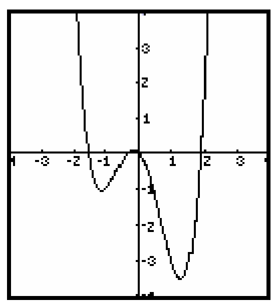
E



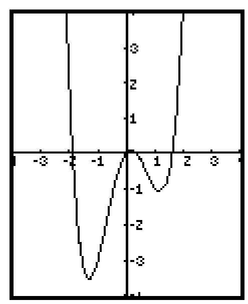
F



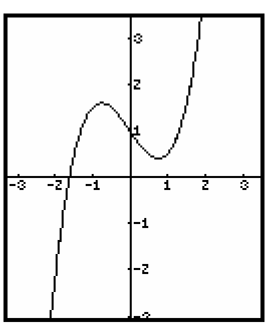
G



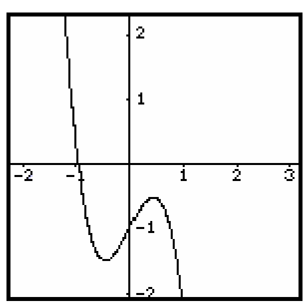
H



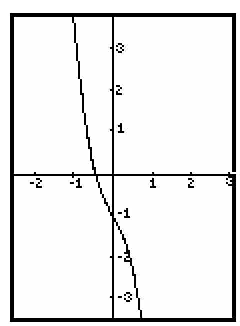
I



J



K



L

4.2. EL ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN

Una vez que hemos presentado la actividad sobre la que discuten los estudiantes en la interacción asincrónica, expondremos una a una las intervenciones de los estudiantes a esta discusión y posterior a cada una de estas intervenciones, presentaremos un análisis enfocado a identificar los objetos ostensivos empleados por los estudiantes y cómo éstos son expresados y comunicados en el medio escrito.

Primera intervención

Actividad A1.1 Expuesto por Pablo	5/22/2003 11:13 PM
A1.1.1 **[304]** y=x^n cuando n=1; obtenemos una recta que cruza el eje coordenado en el origen y su crecimiento será del tercer cuadrante al primer cuadrante, con un angulo de inclinación de 45°. **[305]** cuando n es par; la gráfica será una parabola con vertive en el origen; conforme auente "n" sus "brazos" seran cada vez más cerrados (se acercan al eje "y"), y los puntos más cercanos al vertice cada vez se pegan al eje "x" en el intervalo (-1,1). **[306]** Cuando n es impar: obtendremos una curva cuyo crecimiento será : en el lado negativo el "brazo" hacia abajo (para valores muy pequeños de "x" obtendremos tambien valores muy pequeños de "Y") con un punto de inflexión en el origen y en el lado positivo el "brazo hacia arriba (para valores grandes de "x" valores más grandes de "y"); si aumentamos los valores de n los Brazos seran cada vez más cerrados (se acercan al eje "y"); es decir su crecimiento es más rápido; mientras que en los puntos más cercanos al punto de inflexión la función se pega al eje "x" en el intervalo de (-1,1).	

A1.1.2

[307] El que los "brazos se cierren, se debe al crecimiento exponencial; es decir los valores que toma "Y" decrecen o aumentan cada vez más rápido según aumente el valor de "n".
Por lo mismo el acercamiento sobre el eje "x" se debe a que 1^n será siempre 1 y los valores menores que uno pero mayores que cero, presentaran un crecimiento cada vez más lento conforme aumente "n" observemos:

x	x^2	x^4	x	x^3	x^5
0	0	0	0	0	0
0.5	0.25	0.0625	0.5	0.127	0.03125
0.7	0.49	0.2401	0.7	0.343	0.16807
0.8	0.64	0.4096	0.8	0.512	0.32768
0.9	0.81	0.6561	0.9	0.729	0.59049
1	1	1	1	1	1

en conclusión para todo 0<x<1; los valores de x^n <x^(n-2)

Número de Enunciación	**Objeto Ostensivo Manifestado**
[304]	✓ Discurso Gráfico ✓ Expresiones Algebraicas ✓ Símbolo Geométrico ✓ Expresión Numérica
[305]	✓ Discurso Gráfico ✓ Expresión Algebraica ✓ Intervalo

[306]	✓ Discurso Gráfico ✓ Expresiones Algebraicas ✓ Intervalo
[307]	✓ Discurso Gráfico ✓ Expresiones Algebraicas ✓ Expresiones Numéricas

Tabla 4. Identificación de los objetos ostensivos manifestados en la primera intervención

El primer objeto ostensivo identificado en la enunciación [304] es el que hemos denominado *discurso gráfico*. Nos referimos a este discurso como un objeto ostensivo debido a que es un recurso utilizado por el estudiante que le permite describir características puntuales y globales de la representación gráfica de una expresión algebraica particular. Un discurso descriptivo de este tipo puede estar presente durante una situación de instrucción matemática presencial, muy probablemente en un formato oral-gesticular acompañado de algún gráfico en particular al que el discurso está haciendo referencia; sin embargo, dadas las características del foro asincrónico, el estudiante elabora un discurso escrito pero que en conjunto está haciendo referencia a características gráficas del objeto matemático, es decir, aunque el discurso se desarrolla en un registro escrito, la intención del estudiante es evocar un registro gráfico. Es importante destacar la utilización por parte del estudiante de *símbolos* dentro de su discurso gráfico: el medio escrito permite al estudiante la utilización de símbolos dentro de su discurso que en un discurso oral sería imposible de utilizar, por ejemplo, en lugar de utilizar expresiones como: "con un ángulo de inclinación de cuarenta y cinco grados", el estudiante utiliza el símbolo 45° para denotar la magnitud de inclinación de la recta.

Otro punto que es importante mencionar, es el contenido implícito de las declaraciones. Creemos que algunas de las expresiones utilizadas por los estudiantes en los medios de comunicación escrita poseen información de tipo implícito acerca de los aspectos del objeto matemático que se están tomando como referente para realizar la afirmación o enunciación. Un ejemplo sencillo es la afirmación emitida por Pablo en [304]: "con un angulo de inclinación de 45° ”. A pesar de no ser manifestado explícitamente, parece ser que Pablo entiende la relación existente entre el ángulo de inclinación de una recta y el valor de la pendiente de la ecuación que la representa; o al menos es capaz de aplicar la *técnica* asociada al concepto, que en este caso consiste en obtener la tangente inversa del valor numérico de la pendiente. Como investigadores y docentes es importante tratar de identificar el contenido implícito de las afirmaciones, ya que nos puede proporcionar información muy valiosa acerca de los aspectos particulares del objeto matemático y contextos en los que el estudiante está centrando su atención durante el proceso de comunicación.

Pasemos ahora al análisis de la enunciación [305]. Nuevamente se presenta un discurso gráfico, pero con algunos elementos que le dan un carácter diferente al anterior discurso. Tratemos de aclarar lo anterior: El discurso presentado por Pablo en la enunciación [304], es un conjunto de palabras que describe las características de una representación gráfica *estática*, es decir, Pablo nos describe algunas características de la representación grafica de una expresión en particular, $y = x$. En cambio, el nuevo discurso gráfico desarrollado en [305] nos describe comportamientos gráficos no estáticos que representan procesos y lo más interesante de esta situación es que utiliza una especie de *metáforas* (además de símbolos) para evocar dichos procesos. Por ejemplo, el empleo de palabras en el discurso gráfico tales como “vértice” u “origen”, le permite al interlocutor hacer referencia a *características puntuales* de la representación gráfica en cuestión; en cambio el uso de palabras o frases como “brazos”, “cada vez más cerrados” o “se pegan” dan la posibilidad al estudiante de representar *características globales* del gráfico e incluso referirse a procesos como lo hace Pablo para tratar de explicar el comportamiento gráfico de las ramas de la parábola al aumentar n en la expresión $y = x^n$.

Pareciera ser que Pablo otorga un estatus diferente a estas palabras metafóricas dentro de su discurso, ya que como podemos apreciar éstas son escritas entre comillas (el caso de “brazos”) o proporciona una explicación adicional sobre su significado (en el caso de “serán cada vez más cerrados”, refiriéndose a que las ramas de la parábola se acercan al eje de las ordenadas).

El discurso que nos presenta Pablo en [306] es de la misma naturaleza que el registrado en [2], sin embargo en este punto del análisis es posible percibir la estructura global de la primera intervención de este estudiante: Comienza en [304] explicando y describiendo un caso particular de la expresión $y = x^n$, para posteriormente pasar al análisis de casos generales (el caso de *n* par y el caso de *n* impar) para finalizar en [307] con una justificación de sus aseveraciones como veremos a continuación.

Es posible observar en el caso de [307] la traslación entre registros que efectúa el estudiante durante su discurso escrito con la finalidad de justificar o validar sus afirmaciones previas. Es muy interesante el proceso que se presenta en esta enunciación, ya que el estudiante explica el significado de las metáforas gráficas empleadas en enunciaciones previas como “los brazos se cierran” o “los puntos más cercanos al vertice cada vez se pegan al eje "x"”; en el caso de esta última, la validación se realiza por medio de una traslación a un contexto principalmente numérico junto con el empleo de algunas representaciones algebraicas (1^n, x^3, etc.), que como podemos ver, no corresponden a la representación algebraica usual de estas mismas expresiones (1^n, x^3) ocasionado evidentemente por las características del medio. Este punto lo retomaremos más adelante.

Es importante notar cómo después de validar en un contexto numérico el comportamiento gráficos de $y = x^n$ en el intervalo [0,1], Pablo intenta hacer una generalización obtenida de la exploración numérica en el que su lenguaje tiene un carácter más formal, es decir, no expresa su generalización en un lenguaje natural, más bien trata de expresarse haciendo uso de simbología matemática.

Si observamos el desarrollo de esta primera intervención del estudiante, podremos notar que el discurso va evolucionando desde el manejo de metáforas en una formulación hasta la expresión de generalizaciones mediante lenguaje simbólico. Esto coincide con la postura de Brousseau (1997) al referirse al código lingüístico bajo el que se intercambian mensajes los estudiantes en un patrón de comunicación:

> “It is also possible to make the code itself evolve; to pass from a formulation in natural language to a formal statement, or from metaphors to systematic descriptions” (Brousseau, 1997, p. 68)

Pasemos ahora al análisis de la segunda intervención del foro de discusión asincrónica:

Segunda intervención

Actividad A1.2 Expuesto por Pablo	5/22/2003 11:25 PM

A1.2.1

[308] Al Variar el parametro A en la función y=A+Bx; este provocará que se generen rectas paralelas a la inicial (misma pendiente) pero que cruce al eje "y" en el valor que tome A (ordenada al origen);por ejemplo:
y= 4+ Bx; la recta cortará al eje "y" en +4
y= 3+Bx; la recta cortará al eje "y" en +3
y= Bx;la recta pasará por el origen (0,0)
y= -2+ Bx; la recta cortará al eje "y" en -2

A1.2.2

[309] El primer efecto, es decir que tenga la misma pendiente es que al multiplicar B por cualquier valor de X está obtendra un producto que aumente según varia x pero linealmente y al sumarle el valor A este se desplazará según dicho valor y en la misma proporción, para generar una recta más arriba o más abajo.

Número de Enunciación	Objeto Ostensivo Manifestado
[308]	✓ Discurso Gráfico-Algebraico ✓ Expresiones Algebraicas ✓ Coordenada Cartesiana ✓ Expresiones Numéricas
[309]	✓ Discurso Gráfico ✓ Expresiones Algebraicas

Tabla 5. Identificación de los objetos ostensivos manifestados en la segunda intervención

Nuevamente Pablo comienza su formulación acerca de los efectos de la variación de parámetros en la expresión y = A + Bx con un discurso escrito que intenta evocar un registro gráfico. Este comportamiento es totalmente comprensible si se considera que los cuestionamientos de la actividad se presentan a los estudiantes en un contexto gráfico.

El tema de los parámetros de una ecuación lineal de la forma y = A + Bx es un tema relativamente común en la matemática escolar. El discurso utilizado dentro de una institución escolar para la explicación y justificación de la ecuación lineal muy comúnmente hace uso de las palabras “pendiente” y “ordenada al origen”. Este tipo de palabras también tienen el status de objetos ostensivos:

> “Or tout discours technologique se réalise concrètement par la manipulation d’objets *ostensifs*, en particulier discursifs et écrits, qui permettent de matérialiser les explications et justifications nécessaires au développement de la tâche” (Bosch & Chevallard, 1999, p.94)

Es importante notar el empleo simultáneo de los contextos algebraico y gráfico que efectúa el estudiante para ejemplificar el efecto de la variación del parámetro A en la representación gráfica de la ecuación. Esta articulación de los contextos dentro del discurso del estudiante se ve reforzada debido al *valor semiótico* de las expresión algebraica utilizada en el ejercicio para representar la ecuación lineal, esto es, las expresiones algebraicas utilizadas en el discurso de Pablo nos permiten ver con claridad la función o el efecto del parámetro A en la interpretación gráfica escrita a la derecha de cada una de estas expresiones; esto no sería tan evidente si por ejemplo se expresara a la ecuación lineal en su forma Ax + By = C.

El análisis del empleo simultáneo de los contextos algebraico y numérico nos permiten percibir una falta de sensibilidad por parte del estudiante al significado gráfico de los ostensivos algebraicos utilizados, esto debido a que aparentemente el estudiante no logra interpretar las expresiones algebraicas utilizadas (por ejemplo y = 4 + Bx) como una familia de rectas. Siempre se refiere a la representación gráfica de estas expresiones como “la recta”.

Finalmente el discurso desarrollado en [309] intenta explicar la razón de los comportamientos gráficos enunciados en [308], para esto, emplea un discurso que se apoya en elementos aritméticos asociados a los parámetros de la ecuación lineal. Nótese cómo es que en los ejercicios en los que se les pide formular una explicación de los comportamientos gráficos explorados (en este caso los ejercicios A1.1.2. y A1.2.2.) el estudiante genera un discurso que evoca un registro gráfico en combinación con algún otro registro.

Tercera intervención

Actividad A1.4 Expuesto por Pablo	5/22/2003 11:36 PM
[310] aquí expongo las funciones que hasta el momento he detectado que se aproximan a las gráficas propuestas: A) y= (3/2)x + 1 B) y= -(3/2)x+ (3/4) C) y= - (20/11)x -2 D) y= x^2 + x + (3/4) E) y= -x^2 - (12/5)x +(103/50) F) y= 3x^2 - 2x - (13/15) G) y= 4x^2 + 8x +1 H) I) y= x^4 -3x^2 + x + (1/10)	

J)

K)

L) y= -x^3 -3x-1

Esta es la tercera intervención de Pablo en un lapso de aproximadamente 20 minutos; esto lo podemos determinar dado que cada una de las intervenciones realizadas por los estudiantes quedan registradas en la plataforma de trabajo con la fecha y hora de realización. En las anteriores intervenciones, Pablo había estado contestando a cada uno de los ejercicios de la actividad, sin embargo, vemos que en esta tercera intervención el estudiante no expone su respuesta al ejercicio A1.3 y presenta sus avances en el ejercicio A1.4

Los ostensivos algebraicos son las únicas herramientas de representación utilizadas en esta intervención, lo cual es completamente natural debido a que la respuesta al ejercicio A1.4. es demandada en estos términos a los estudiantes. Es en este momento que vamos a retomar un punto tratado anteriormente: La representación de los ostensivos algebraicos en la interfase de la computadora. Como podemos apreciar, al verse imposibilitado a utilizar representaciones algebraicas tales como x^2, el estudiante como parte de un proceso de adaptación al medio, utiliza modos de representación algebraica adaptados a la interfase como x^2. Este fenómeno de la correspondencia entre los conceptos conocidos por el usuario de la computadora y su representación en la interfase ha sido denominado *correspondencia semántica directa*. Si los conceptos representados al interfase son diferentes de los conceptos habituales, la interfase obliga al usuario a hacer un esfuerzo de adaptación de sus conceptos a los que se le presentan. (Nanard, 1990, citado en Jean, 2000). Un fenómeno que nos llama la atención, es que casi en la totalidad de las interacciones observadas, los estudiantes utilizan el símbolo “^” para denotar un determinado exponente, y lo utilizan sin dar una explicación previa sobre el significado de la notación; es muy probable que el origen de la utilización de dicha simbología este relacionado con la utilización de software matemático o calculadoras graficas, ya que en la mayoría de estas herramientas tecnológicas, la representación de expresiones exponenciales se realiza utilizando este tipo de símbolo. Un ejemplo de ello es el programa GRAPHMATICA, el cual como se indica en la nota introductoria de la actividad A1., fue puesto a disposición de los estudiantes como una herramienta para afrontar la actividad mencionada. En la siguiente figura se muestra la representación gráfica y algebraica de la ecuación $y = x^3$.

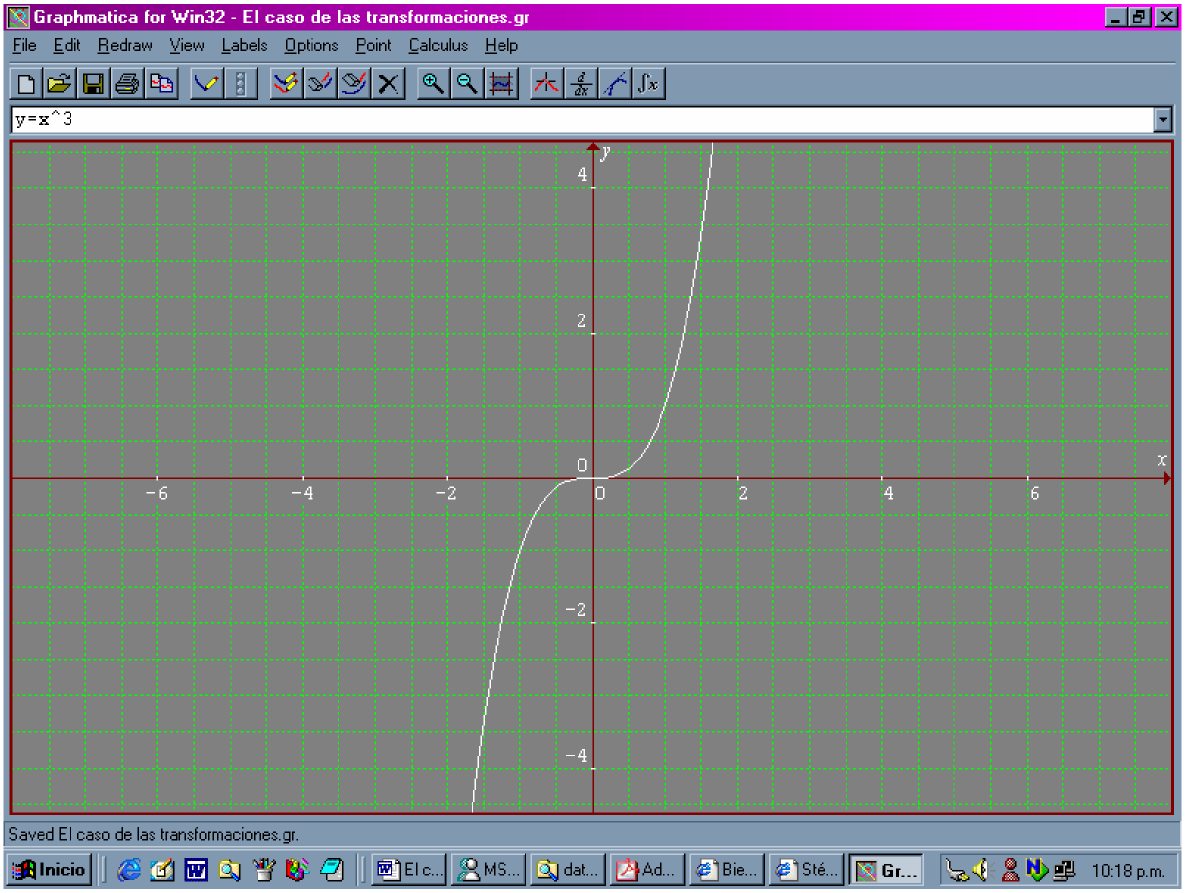


Figura 3. Representación gráfica y algebraica de $y = x^3$ *en GRAPHMATICA.*

Cuarta intervención

algunas observaciones Expuesto por Juan	5/23/2003 5:14 AM

[311] Para el caso de y = a + bx + cx^2
La variación del valor de a, en este caso, permite la traslación de la curva, hacia "arriba" o hacia "abajo". Todas las parábolas tienen el mismo eje de simetría, la misma "abertura" (considerando como tal la distancia entre dos puntos de igual ordenada). La velocidad de crecimiento o decrecimiento de todas las parábolas es similar.

[312] Al variar el parámetro b, hay un desplazamiento del eje de simetría de la parábola.
Así, si b es negativo, el desplazamiento del eje de simetría será hacia la derecha y si es negativo, será hacia la izquierda.

[313] Para el caso de y = a + bx + cx^2, tomando como parámetro variable a c,
Si c es mayor que cero, la concavidad es positiva, si c = 0 tenemos una recta y si c < 0, concavidad negativa.

[314] La combinación de variaciones de los tres parámetros, permite el desplazamiento de la curva entonces en sentidos vertical y horizontal y a su vez una variación de su concavidad.
Por otra parte, cuanto mayor es el valor absoluto de c, mayor es la velocidad de variación (crecimiento o decrecimiento, según corresponda)

A1.3.b)
[315] Para el caso de y = a + bx + dx^3
La variación del parámetro a, produce en este caso una traslación en dirección paralela al eje de las ordenadas. Hacia arriba si a > 0 y hacia abajo si a < 0.

[316] Para el caso de y = a + bx + dx^3, considerando a b como parámetro
Si b y d tienen igual signo, la función solo crece o decrece. A mayor valor absoluto de d, mayor velocidad de crecimiento o decrecimiento.
Si b = 0 , tendrá un punto de inflexión con tangente horizontal y será siempre

creciente o decreciente, según el signo del coeficiente d.
Si b y d tienen distinto signo, la función tiene máximo y mínimo relativos.

[317] Al aumentar el valor absoluto de d. disminuye la distancia entre las abscisas de los extremos relativos y también disminuye la distancia entre sus ordenadas.
y valen las mismas consideraciones al aumentar el valor absoluto de d.

[318] Para el caso de y = a + bx + dx3, tomando como parámetro a d
Valen similares consideraciones que en el caso anterior.
Si b y d tienen igual signo, la función solo crece o decrece, (según el signo de d).

[319] Al aumentar el valor absoluto de d, la distancia entre las abscisas de los extremos relativos disminuye, así como también la de las ordenadas de los mismos.
y vale la misma observación con respecto a las distancias respecto al crecimiento del valor absoluto de d.

Numero de Enunciación	**Objeto Ostensivo Manifestado**
[311]	✓ Expresión Algebraica ✓ Discurso Gráfico
[312]	✓ Expresión Algebraica ✓ Discurso Gráfico
[313]	✓ Expresiones Algebraicas ✓ Discurso Gráfico

Tabla 6. Identificación de los objetos ostensivos manifestados en la cuarta intervención

La cuarta intervención en el chat es realizada por Juan, uno de los compañeros de equipo de Pablo. Si observamos el contenido de la intervención de Juan, notaremos (aunque Juan no lo hace explícito) que en cierta manera esta intervención es una respuesta/complemento a las intervenciones anteriores efectuadas por Pablo, ya que Juan aborda la actividad A1.3, la cual como hemos notado anteriormente, no fue expuesta por Pablo.

El primer ostensivo identificado, es la representación algebraica de la ecuación cuadrática por analizar. Nótese como Juan utiliza la misma adaptación de los ostensivos algebraicos que utilizó Pablo, es decir, en la escritura de estas expresiones también hace uso del símbolo “^”.

El segundo ostensivo identificado en [311] lo constituye el discurso gráfico utilizado, el cual como podemos apreciar, comparte ciertas características con las enunciaciones [305] y [306] realizadas por Pablo: la utilización de palabras escritas entre comillas (“arriba”, “abajo”) y la presentación de una explicación adicional sobre el significado de la palabra como en el caso de “abertura”. En esta enunciación identificamos otro ostensivo importante para la estructuración del discurso de Juan. Este ostensivo es la palabra *eje de simetría*. Al mencionar que “todas las parábolas tienen el mismo eje de simetría”, pareciera ser que quisiera expresar la idea de que al variar el parámetro *a* en la expresión $y = a + bx + cx^2$ se generan parábolas que no se trasladan horizontalmente ya que comparten el mismo eje de simetría. Un uso similar se le da a la palabra *abertura*, pero en este caso es utilizada para referirse a un grupo de parábolas con un ancho focal (también llamado lado recto) constante.

El ostensivo “eje de simetría” vuelve a estar en la explicación formulada por Juan en [312] acerca del efecto de la variación del parámetro b en la representación gráfica de la expresión $y = a + bx + cx^2$, es este caso, lo usa para evocar la traslación horizontal de la gráfica tanto a la izquierda como a la derecha, dependiendo del valor de *b*. Tanto en [311] como en [312] la palabra “eje de simetría” es usada como referente para describir traslación o ausencia de traslación horizontal de la gráfica. La palabra “eje de simetría” es el nombre[8] de un objeto ostensivo perteneciente al discurso tecnológico que explica y justifica la expresión analítica de la parábola; consideramos que estos objetos ostensivos asociados a la

[8] “Dans la plupart des cas, les objets institutionnels se verront associes à un objet ostensif privilégié, leur *nom*, qui en permettra une évocation minimale” (Bosch & Chevallard, 1999, p. 91)

parábola y establecidos institucionalmente (como sucede generalmente) se activan en el momento en que Juan reconoce al ostensivo $y = a + bx + cx^2$ como una representación del objeto parábola, de la misma manera en que aparecen los ostensivos “pendiente” y “ordenada al origen” en el discurso manejado por Pablo en [308] al reconocer a la expresión $y = A + Bx$ como la representación de una ecuación lineal.

En la enunciación [313], al referirse a la variable *c* en la expresión $y = a + bx + cx^2$, se activa un ostensivo estrechamente relacionado a esta variable: la palabra *concavidad*. Este ostensivo y la utilización de símbolos algebraicos permiten a Juan articular un discurso breve que comunica aspectos del comportamiento de la parábola cuando la constante *c* cambia de valor.

La expresión [314] parece mostrar una visión global de los efectos de la variación de los parámetros *a*, *b* y *c* en la representación gráfica de la expresión $y = a + bx + cx^2$. Notemos además como es que Juan aparte de relacionar a la variable *c* con el signo de la concavidad de la gráfica, identifica a esta variable con lo que el llama velocidad de variación.

Los ejercicios anteriormente presentados referentes a la manipulación de parámetros y su consecuentes efectos en las representaciones gráficas han permitido la activación de ostensivos como “pendiente” y “concavidad” que se encuentran asociados a significados gráficos de algunos de los parámetros manipulados; la siguiente actividad, la actividad A1. 3. b), la cual es tratada por Juan en las enunciaciones [315]-[319], pone en juego la exploración parámetros de la expresión $y = a + bx + dx^3$, veamos a continuación que ostensivos se presentan en este caso.

El primer parámetro explorado de la expresión $y = a + bx + dx^3$, es el parámetro *a* el cual es identificado por Juan como el responsable del movimiento de la gráfica en dirección vertical [315]. En enunciaciones previas, este parámetro *a* había sido reconocido por Pablo y Juan como generador de este tipo de movimientos en las gráficas de $y = a + bx$ y $y = a + bx + cx^2$ respectivamente. (ver [308] y [311]).

La enunciación [316] presenta una técnica de análisis no aplicada por Juan previamente. A pesar de que Juan expone en su discurso el efecto de la variación del parámetro *b*, no analiza al parámetro en forma independiente como lo ha hecho en los casos anteriores, sino que en esta ocasión analiza la variación del parámetro *b* considerando simultáneamente al parámetro *d*. El análisis presentado por Juan, explora los siguientes casos:

1. Variación del parámetro b cuando b y d poseen el mismo signo.
2. Variación del parámetro b cuando b y d poseen signo distinto.

Es claro que los dos casos previamente mencionados pueden ser descompuestos a su vez en dos casos cada uno. Esta *nueva técnica* utilizada para afrontar la actividad y que involucra el manejo simultáneo de dos parámetros permitió a Juan obtener información importante acerca del comportamiento gráfico de la ecuación cúbica. Bajo la aproximación antropológica podemos considerar este suceso como un progreso:

> "Une évolution – et souvent même un *progress* – apparaît lorsque, devant la situation où un type de tâches se révèle problématique, on decide, non de refouler la problématicité de la tâche – situation anthropologiquement la plus fréquente –, mais d'*étudier* le problème dans le but de construire la technique manquante" (Bosch & Chevallard, 1999, p. 85)

El caso número 1 mencionado previamente es expuesto por el estudiante en [316] . En las figuras 4 y 5 hemos representado los dos casos subyacentes al caso 1.

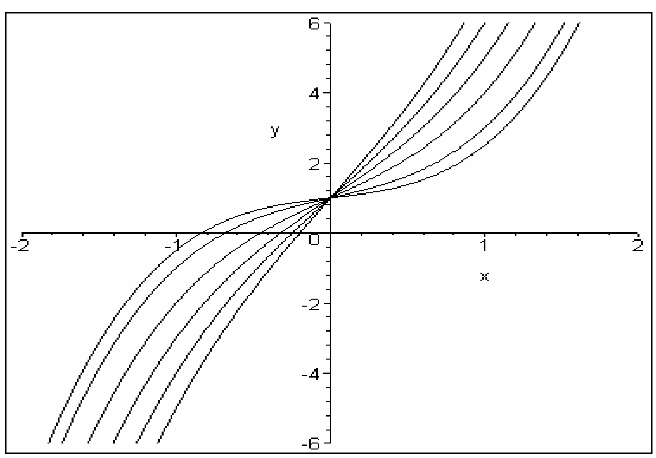


Figura 4. Variación del parámetro b en la expresión $y = 1 + bx + x^3$ *cuando* $0 < b \le 5$.

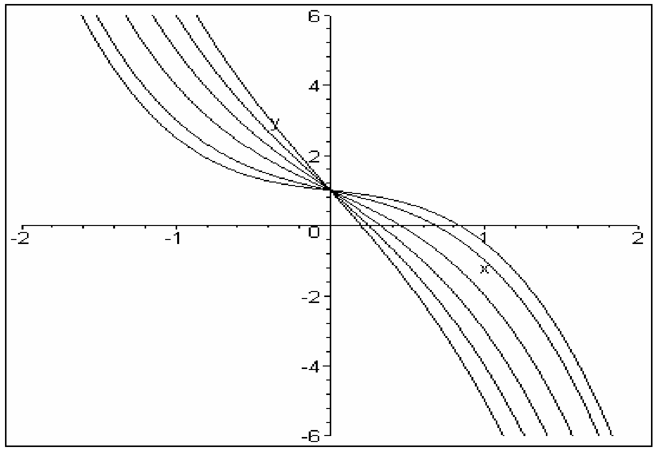


Figura 5. Variación del parámetro b en la expresión $y = 1 + bx - x^3$ *cuando* $-5 \leq b < 0$.

Al mencionar el caso en que *b* = 0, el estudiante hace uso de dos ostensivos para articular su descripción gráfica de la situación: "punto de inflexión" y "tangente horizontal". De la misma manera, al abordar el caso en que los parámetros *b* y *d* poseen diferente signo, utiliza los ostensivos "máximo y mínimo relativos" para hacer referencia al comportamiento no uniforme (es decir, en momentos creciente, en momentos decreciente) de la gráfica de $y = a + bx + dx^3$ (figura 6). A través de la manipulación conjunta de los parámetros *b* y *d*, el estudiante logra identificar tres casos particulares de comportamiento gráfico:

- Cuando la función cúbica tiene un comportamiento creciente (figura 4)
- Cuando presenta un comportamiento decreciente (figura 5)
- Cuando el comportamiento de la gráfica es no uniforme (figura 6)

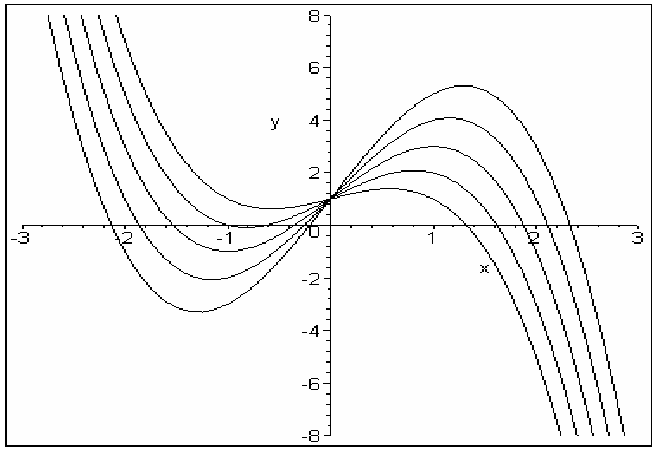


Figura 6. Variación del parámetro b en la expresión $y = 1 + bx - x^3$ *cuando* $1 \le b \le 5$.

En [317] el estudiante utiliza las magnitudes de las abscisas y ordenadas de los extremos relativos para explicar el efecto gráfico provocado al aumentar el valor absoluto de los parámetros en cuestión.

En los párrafos [318] y [319] se formulan los efectos de la variación del parámetro d. Básicamente se utilizan los mismos argumentos y procedimientos que en [316] y [317].

Quinta intervención

Actividad A1.4 Expuesto por Juan	5/24/2003 11:10 AM
[320] Pablo: Con respecto a tus propuestas de fórmulas: A: tenemos la misma: y = 1.5x+1 B: mi propuesta es y= -1.6x+1, la tuya y = -1.5x+3/4 y la de luis y = -1.6x+0.8 Prefiero la de luis, que creo es la que mas se acerca al al propuesta.	

C: prefiero tu propuesta: y = -20/11x-2, es mejor que la mía
D: tu propuesta es y = x^2+x+3/4. Fíjate que en ese caso, la ordenada en el origen es 3/4 y la propuesta parece indicar que debe ser 1.
Luis propone y = 0.8x^2+0.8x + 1 que la prefiero a la mia (y=0.5x^2+0.5x+1)
E: tu propuesta de y=-x^2-12/5x+103/50 tiene el inconveniente de que tiene el vésrtice de la parabola con abscisa negativa, mientras que la de la figuar es positiva.
De pronto, cambiando a y=-x^2+12/x+103/50 si funciona (aunque no hay mucha diferencia grafica con mi propuesta de y=-x^2+0.4x+2)
F:prefiero tu propuesta de y = 3x^2-2x-13/5.
G: aquí si discrepo totalmente contigo. Creo que la gráfica propuesta no se corresponde con la de una parabola (que es la de una de 2º grado), por eso no me gusta.
Por eso, sigo pensando que es mejor : y= 3x-x^2+x^4
H: aqui no tienes propuesta. Luis propone y = -16478(x+1.75)(x+0.3)(x-0.8)x
A mi no me desagrada su porpuesta, pero no me convence pues creo que la propuesta de formulas esta relacionada con la investigacion hecha en funcion de los parametros
Para el caso de la de cuarto grado, investigamos con la forma y= a+bx+cx^2+ex^3 y la propuesta de jose origina una fórmula completa o sea del tipo y = a + bx +cx^2+dx^3+ex^4
Por eso, para buscar algo coherente con la discusion hecha, propongo y = 2x^4-5x^2-2x (aunque no me convence demasiado pues la ordenada del minimo de la derecha es mucho menor que la que propone el ejercicio)
I: tu propuesta de y = x^4-3x^2+x+1/10 esta muy buena (es mejor que cualquiera de la dos que yo hice). Solo me queda la duda si la fucnion no "pasa" por el orgen de coordenadas.
Luis propone y =1.07692(x+2)(x-0..3)(x-1.5)x, pero le veo el mismo inconveniente que en el caso anterior (por aquello de que no se corresponde con los modelos que discutimos, en el cual el coeficiente de tercer grado es cero)
J: ante tu falta de propuesta y de luis tambien, mantengo la mia

K: idem anterior
J: propones y = -x^3-3x-1. No me convence (tampoco me convence la mia: y= -8x^3-2x-1). Sobre todo pues mirando el ejercicio, la funcion que nos proponen tiene un decrecimiento muy acelerado, fíjate que en x = -1, la ordenada es mayor que 1.
En tu propuesta, en el intervalo (-2,-1) de abscisas, tenemos ordenadas mayores que 3 y me parece que en la propuesta lo son mayores
Te todas maneras, creo que tenemos dos buenas propuestas.

Estoy elaborando la "discusion final",

saludos

Juan

En esta quinta intervención, Juan expone en el foro una especie de validación de las propuestas de los tres integrantes del equipo, presentada por medio de un discurso algebraico-numérico a lo largo del cual se hace uso de ostensivos algebraicos, numéricos y gráficos[9]. Esta validación tiene como propósito la selección de las respuestas a incluir en el reporte grupal de la actividad. Este reporte de los estudiantes será utilizado para tratar de obtener más información de los eventos registrados durante la interacción, ya que dado el carácter grupal del reporte, éste debe ser el producto de consensos y acuerdos, y probablemente puede proporcionar información adicional sobre la activación, el uso y la comunicación de objetos ostensivos durante este proceso de interacción. Este reporte se encuentra incluido en el anexo 2 al final de este escrito.

En esta participación a la discusión asincrónica, Juan hará referencia a las propuestas expuestas por Pablo, así como a las propuestas de Luis. Estás últimas no han sido

[9] Ostensivos "gráficos" en el sentido que hemos venido manejando: son palabras o frases representadas en forma escrita y que son utilizadas por el estudiante para enmarcar descripciones de formas, comportamientos y procesos generados en registros gráficos.

registradas previamente en el foro, pero es posible que Luis haya enviado sus propuestas a Juan, y este a su vez mencionarlas en el foro.

Como podemos apreciar, existe una diferencia en el tipo de notación utilizado por Juan con respecto a la utilizada por Pablo en [310]. En esta quinta intervención Juan deja de lado la utilización de paréntesis en las ecuaciones, y se aprecia un uso predominante de la notación decimal sobre la notación fraccionaria utilizada por Pablo en [310]. Las notaciones, los nombres, y demás ostensivos son *objetos institucionales*; Juan como estudiante originario de Uruguay puede acostumbrar otro tipo de notación apropiada institucionalmente. Como podemos ver, aunque suprime completamente el uso de paréntesis, no en todos los caso utiliza la notación decimal; sin embargo el reporte grupal de la actividad el cual fue escrito por Juan nos muestra su inclinación por el uso de la notación decimal:

	fórmula propuesta
A	$y = 1{,}5x + 1$
B	$y = -1{,}6x + 0{,}8$
C	$y = -1{,}818x - 2$
D	$y = 0{,}8x^2 + 0{,}8x + 1$
E	$y = -x^2 + 2{,}4x + 2{,}06$
F	$y = 3x^2 - 2x - 2{,}6$
G	$y = 3x - x^2 + x^4$
H	$y = 2x^4 - 5x^2 - 2x$
I	$y = x^4 + 3x^2 + x + 0{,}1$
J	$y = 3x^3 + 2{,}5x^2 - 2{,}33x + 1$
K	$y = -3x^3 + 2x - 1$
L	$y = -8x^3 - 2x - 1$

Figura 7. Extracto del reporte grupal a la actividad A1

En el inciso B, se presentan tres propuestas pertenecientes a cada uno de los integrantes del equipo. En este caso, y otros desarrollados más delante aunque no es mencionado explícitamente, creemos que en la mayoría de los casos la validación de las propuestas se realiza en un contexto gráfico, ya que si la tarea es asignar una ecuación a una gráfica en particular, ¿cómo decidir que propuesta algebraica es la que mejor se aproxima a la grafica cuando las propuestas son numéricamente muy parecidas como en el caso de $y = -1.5x + \frac{3}{4}$ e $y = -1.6x + 0.8$?. Evidentemente se compara la representación gráfica de las propuestas con la gráfica a la que se quiere representar. En este tipo de validación la tecnología[10] juega un papel muy importante, ya que permite a los estudiantes generar una discusión al final de la cual de debe elegir la mejor de entre tres propuestas cuyos parámetros difieren por décimas de unidad. Sin el apoyo de este tipo de herramientas tecnológicas no sería posible realizar este tipo de comparación gráfica con exactitud, sin embargo, también sería pertinente cuestionarnos si es conveniente o provechoso para los propósitos de la actividad que los estudiantes se involucren en este tipo de discusiones.

Como veremos a continuación, la validación de las propuestas no sólo se desarrolla en contextos gráficos. Por ejemplo, en el inciso D, la propuesta de Pablo es desacreditada por Juan por medio de una comparación gráfico-paramétrica, esto es, aprovechando la validez semiótica de la expresión $y = x^2 + x + \frac{3}{4}$, y sobre todo los efectos gráficos de la variación de parámetros explorada anteriormente, Juan es capaz de identificar al valor $\frac{3}{4}$ con el punto de intersección de la gráfica correspondiente y el eje de las ordenadas, incluso extrapola el nombre "ordenada al origen" para designar y describir a este parámetro. Tomando como referencia el punto de intersección de la gráfica a aproximar con el eje de las ordenadas el estudiante afirma: "la propuesta parece indicar que debe ser 1" con lo cual termina de invalidar la propuesta de Pablo.

Un fenómeno que nos parece muy interesante es el que se presenta en los incisos H e I. En el inciso H, Juan coloca en una situación de validación la propuesta que Luis ha formulado para este caso, pero lo que nos parece interesante es que Juan cuestiona la validez de la propuesta de Luis no por su validez matemática[11], ni por la eficacia con la que aproxima al gráfico en cuestión, sino por no aparecer como una *técnica* justificada dentro

[10] En este caso nos estamos refiriendo al software computacional utilizado para representar gráficamente las propuestas de los estudiantes.
[11] Si analizamos la proposición de Luis, descubriremos que es matemáticamente incorrecta, debido principalmente a la elección de $x = 0.8$ como una de las raíces del polinomio

del marco de trabajo basado en la manipulación de parámetros, basta con mirar la enunciación de Juan: "A mi no me desagrada su porpuesta, pero no me convence pues creo que la propuesta de formulas esta relacionada con la investigacion hecha en funcion de los parametros"

Este hecho es muy importante para nuestro estudio, ya que nos proporciona información acerca de los procesos de validación e institucionalización de una técnica en una situación de interacción del tipo estudiante-estudiante. Creemos que es posible encontrar una posible explicación a este suceso en la teoría antropológica:

> "Le troisième postulat anthropologique concerne alors l'*ecologie des tâches et des techniques*, c'est-à-dire les conditions et contraintes qui en permettent la production et l'utilisation dans des institutions. On suppose que, pour pouvoir exister dans une institution, une technique doit apparaître comme un tant soit peu *comprehensible*, lisible et *justifieé*" (Bosch & Chevallard, 1999, pp. 85-86).

Como menciona Artigue (2002), el concepto de *institución* debe ser entendido en esta teoría en un sentido muy amplio. En este caso nosotros estamos asignando el papel de institución al grupo de estudiantes que integran el equipo de trabajo. Consideramos que es posible hacer tal asignación debido a la generalidad del concepto:

> "Là encore, une institution peut être à peu près n'importe quoi. En pratique, à cause du sens courant du mot, certains d'entre vous pourront être surpris de voir à quels objets je pourrai être amené à accoler cette etiquette. Une école est une institution, de même qu'une classe; mais il y a aussi l'institution <<travaux dirigés>>, l'institution <<cours>>, l'institution <<famille>>. La vie quotidienne est une institution (dans un milieu social donné), et il en est encore ainsi de l'etat amoureux (dans une culture donnée), etc" (Chevallard, 1992, p. 88)

Si verificamos en el anexo 2 comprobaremos que, efectivamente la propuesta de Luis no fue incluída en el reporte final del equipo.

Sexta intervención

A1.3 Expuesto por Pablo	5/24/2003 10:18 PM
[321] a) y=A+Bx+Cx^2 al variar el parametro "A" se provocandesplazamientos del vertice hacia arriba o hacia abajo. "B"genera que los brazos de la función crezcan recargandoze en una recta de la misma pendiente. al variar "C" 1) si c>0 la parabola "abrirá" hacia arriba 2) si C<0la parabola "abrirá" hacia abajo 3) que sus "brazos" sean cada vez más "cerrados si el valor de C aumenta pero esta siempre estará "recargada" sobre la recta Bx+A	

En esta sexta intervención, Pablo retoma la actividad A1.3, la cual dejó de lado durante sus primeras tres intervenciones. En esta ocasión el estudiante se limita a tratar el primero de los tres casos incluidos en la actividad, el de la ecuación $y = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2$.

Los objetos ostensivos identificados en esta intervención se enuncian en la siguiente tabla:

Número de Enunciación	**Objeto Ostensivo Manifestado**
[321]	✓ Expresiones algebraicas ✓ Discurso gráfico que incluye el uso de metáforas

Tabla 7. Identificación de los objetos ostensivos manifestados en la sexta intervención

En el caso del parámetro A, Pablo al igual que Juan, identifica a este parámetro como el causante de un movimiento vertical en la parábola. Para hacer referencia a este movimiento, Juan utiliza el ostensivo “vértice” como punto de referencia.

Si revisamos la enunciación [312] en la cuarta intervención del foro asincrónico, veremos que Juan identificó al parámetro B como el generador de un movimiento horizontal del eje de simetría de la parábola; Pablo por su parte, logra relacionar al parámetro B con un comportamiento gráfico muy particular, que en palabras de Juan es expresado de la siguiente manera: "B" genera que los brazos de la función crezcan recargandoze en una recta de la misma pendiente. Cuando Pablo menciona el efecto de la variación del parámetro C, retoma esta idea afirmando: ...siempre estará "recargada" sobre la recta Bx+A. Esta propiedad identificada por Pablo, que pone en juego relaciones entre los contextos gráficos y algebraicos, ha sido denominada dentro de la línea de investigación sobre el comportamiento tendencial de las funciones como la *linealidad del polinomio*[12].

Al revisar el reporte grupal de esta actividad contenido en el apéndice 2, podremos constatar que a pesar de que Carlos logra identificar un efecto en la representación gráfica de $y = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2$ producido por la modificación del parámetro B, y en particular asociar el valor de este parámetro con el valor de la pendiente en la ecuación lineal $y = \mathrm{A} + \mathrm{B}x$ contenida en la expresión $y = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2$. Desafortunadamente la discusión asincrónica no proporciona más información que nos permita inferir cuáles fueron los procesos de validación seguidos por el grupo para conformar la respuesta final a la actividad A1.3.a).

Queremos notar nuevamente el uso de metáforas por parte del estudiante para articular su discurso gráfico (por ejemplo “brazos”, “recargada”). El análisis de este hecho será retomado más adelante.

[12] Para una explicación más amplia al respecto consultar Cordero (1998) y Cantoral, et al (2000), Capítulo 5, *el comportamiento tendencial de las funciones: la linealidad del polinomio.*

Séptima intervención

comentarios sobre actividad A1 Expuesto por Luis	5/25/2003 10:24 AM
[322] Mis primeros comentarios sobre la actividad A 1 Sobre la actividad A 1.1 Para la función y = x * n (en este caso, el símbolo * lo considero como elevación a potencias). Comentarios: Al colocar exponentes pares, nuestra función "y" solamente adquirirá valores positivos y representará parábolas ubicadas en los cuadrantes primero y segundo (ya que la "x" es positiva). Al colocar exponentes impares, nuestra función "y" adquirirá tanto valores positivos como negativos y por lo tanto su grafica estará representada en los cuadrantes primero y tercero. **[323]** Sobre la actividad A 1.2 . Para la función y = A + B x , variando el parámetro "A". Comentarios: 1.- Sabemos que es una función lineal y por lo tanto nos representa una línea recta. 2.- También, sabemos que las funciones cuyo criterio es multiplicar por un número reciben el nombre de lineales. 3.- De acuerdo a las graficas, propuestas por usted, se consideró el conjunto de los números enteros Z; y para el criterio que define la función se consideró B = 2 (usted propuso un cambio, y en vez de "B" propuso "a", que considero valido y adecuado para los propósitos que se buscan).	

4.- Por otra parte, sabemos que las funciones lineales son homomorfismos por cumplir las características:

A) f (x + y) = f (x) + f (y)

B) f (K x) = K f (x)

5.- De acuerdo a lo anterior, tenemos funciones afines a la función y = 2 x; donde si hacemos variar el número "A" tendremos líneas asociadas paralelas a nuestra función afín y = 2 x.

6.- En geometría analítica, tenemos que la función y = A + B x, se llama ecuación de la línea recta con pendiente (para nuestro caso la pendiente es B) y ordenada al origen (para nuestro caso es A).

7.- Finalmente, si hacemos variar el parámetro "A" estaremos variando la ordenada al origen y tendremos líneas asociadas paralelas (actividad A1.2.1), y si hacemos variar el parámetro "B" estaremos variando la pendiente de la recta (actividad A1.2.2).

[324] Para la actividad A 1. 4 estoy revisando las graficas y creo que la ecuación de la grafica "B" puede ser y = -1.6 x + 0.8. Para la grafica "D" creo que la función podría ser y = 0.8 x *2 + 0.8 x + 1.
Como puede observar las variaciones son mínimas, y este tipo de variaciones creo que no son trascendentes para ponerlas a crítica o a debate.

[325] Sobre la actividad A1.3

La ecuación que usted ha propuesto, y = a + 2x + 3x*2, la podemos transformar a su forma canónica, quedando:

1/3 (y - a + 1/3) = (x + 2/3)*2.

Si observamos, en este caso tenemos que 1/3 es la longitud del lado recto de la parábola y la expresión (1/3) - a es la ordenada del vértice de dicha parábola; por lo tanto al variar “a” estamos desplazando, verticalmente, el vértice de la parábola (claro, teniendo a los términos “b” y “c” en forma constante).

[326] Por otro lado, considerando la ecuación de la parábola en su forma canónica más general:

(x - h)*2 = 4p (y - k), y desarrollándola, observamos lo siguiente:

X*2 - 2xh + h*2 = 4py -4pk.

En este caso, la pendiente de la tangente a la parábola en el punto (0,2)cambiará conforme cambiemos 2h; y 2h es el coeficiente “b” de nuestra ecuación.

[327] Finalmente, al variar el término “c” estaremos variando todas las características de la parábola, tanto posición como forma.

Los comportamientos anteriores son aceptables y se pueden aplicar para las funciones de las actividades A1.3b y A1.3c.

En esta séptima intervención, Luis hace su aparición en el foro, aunque como hemos mencionado previamente (ver quinta intervención), Luis ha enviado previamente sus propuestas a Juan por otro medio; afortunadamente para nuestra investigación, Luis decide registrar sus propuestas en el foro.

Los ostensivos identificados en la primera intervención de Luis, se reportan en la siguiente tabla:

Numero de Enunciación	Objeto Ostensivo Manifestado
[19]	✓ Expresiones Algebraicas ✓ Discurso Gráfico
[20]	✓ Expresiones Algebraicas ✓ Discurso Gráfico
[21]	✓ Expresiones Algebraicas
[22]	✓ Expresiones Algebraicas ✓ Discurso Gráfico
[23]	✓ Expresiones Algebraicas (Forma Canónica)

Tabla 8. Identificación de los objetos ostensivos manifestados en la séptima intervención

Al inicio de la enunciación [322] se puede apreciar la adaptación de los ostensivos algebraicos que Luis realiza, en particular para la notación exponencial. Este estudiante presenta comportamientos muy particulares en este contexto, ya que de todos los estudiantes observados, Luis es el único estudiante que no utiliza el símbolo "^" para denotar exponentes en las expresiones algebraicas y además (probablemente como consecuencia de lo anterior) es el único estudiante que hace explícito el significado de la notación exponencial utilizada (en este caso la utilización del símbolo "*").

El ostensivo gráfico "cuadrante" juega un rol central en el discurso gráfico desarrollado por Luis en [322] ya que le permite al estudiante delimitar los comportamientos gráficos a los que hace referencia.

La enunciación [323] nos proporciona evidencia de la activación de ostensivos comunes entre los tres estudiantes al cuestionárseles sobre la manipulación de parámetros en la expresión $y = \mathrm{A} + \mathrm{B}x$. Nos referimos a los ostensivos "pendiente" y "ordenada al origen", generados por la identificación inmediata de la expresión mencionada con la de una ecuación lineal. En el caso de la enunciación desarrollada por Luis, se presentan objetos no ostensivos (por ejemplo el concepto de homomorfismo o el de transformación lineal implícito en las características A) y B) mencionadas en el inciso 4.) que al parecer el estudiante relaciona con el concepto de función lineal.

A diferencia de sus compañeros, Luis aborda la justificación del efecto de la variación de los parámetros A y B en la representación grafica de la ecuación cuadrática $y = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2$ auxiliándose de la forma estándar de la ecuación de una parábola con eje paralelo al eje de las ordenadas[13] representada por

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad (1)$$

Por ejemplo, en [325] el estudiante se refiere a la expresión cuadrática $y = a + 2x + 3x^2$ propuesta por alguno de sus compañeros y cometiendo algunos errores numéricos transforma la expresión a su forma estándar (o canónica como la refiere Luis):

$$\frac{1}{3}\left(y - a + \frac{1}{3}\right) = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 \qquad (2)$$

A pesar de sus errores en el manejo de los signos, el estudiante identifica a $a - \frac{1}{3}$ (en realidad el estudiante lo refiere como $\frac{1}{3} - a$) como el valor de la ordenada k del vértice de la parábola (1). De esta manera el estudiante finalmente afirma: "...la expresión (1/3) - a es la ordenada del vértice de dicha parábola; por lo tanto al variar "a" estamos desplazando, verticalmente, el vértice de la parábola (claro, teniendo a los términos "b" y "c" en forma constante)"

En la enunciación [326], donde se justifica el efecto en la representación gráfica de $y = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2$ generado por la manipulación del parámetro B, el estudiante nuevamente hace uso de la relación expresada en (1), la cual es desarrollada para obtener la siguiente expresión:

---

[13] Tomado de Zill (1987), Cap. 12, Geometría analítica en el plano.

$$x^2 - 2xh + h^2 = 4py - 4pk \qquad (3)$$

De esta última expresión el estudiante afirma: "En este caso, la pendiente de la tangente a la parábola en el punto (0,2) cambiará conforme cambiemos 2h; y 2h es el coeficiente "b" de nuestra ecuación".

Si analizamos detenidamente la afirmación anterior, pareciera ser que su discurso trata de evocar la propiedad de la linealidad del polinomio identificada por Pablo en [321] cuando éste afirmaba: "B genera que los brazos de la función crezcan recargandoze en una recta de la misma pendiente". Prueba de esto es que Luis identifica al coeficiente B como equivalente al coeficiente $2h$ (lo cual evidentemente es un error algebraico) representado en (3) y este a su vez lo asocia con la pendiente de la tangente a la parábola.

En el proceso de interacción que hemos presentado a lo largo de este capítulo es posible observar que los estudiantes son capaces de asociar una expresión algebraica que represente a una representación grafica particular (ver actividad A1.4 y Figura 7). De manera inversa, los estudiantes lograron identificar el efecto que sufre la gráfica de una función determinada al variar sus parámetros, e incluso logran asociar algunos de estos con nombres institucionalmente establecidos como "ordenada al origen" y "pendiente".

También es importante destacar que el proceso de interacción desarrollado entre los estudiantes no permitió que algunas explicaciones sobre la variación de parámetros como la formulada por Pablo en [321] no sobrevivieran el proceso de validación que culminó en la elaboración de una respuesta grupal escrita a estas actividades.

En este momento hemos analizado dos bloques de interacciones en los cuales hemos empleado dos metodologías diferentes para su análisis. En el siguiente capítulo presentaremos el tipo de información obtenida con cada una de ellas y trataremos de dar respuesta a las interrogantes formuladas en el capítulo 1.

CONSIDERACIONES FINALES

Hemos presentado los análisis de dos interacciones para lo cual se han utilizado dos diferentes herramientas metodológicas. Estos análisis, realizados desde diferentes perspectivas, nos ha permitido generar explicaciones a los fenómenos didácticos manifestados en cada uno de los episodios de interacción. En la parte final de este capítulo, presentaremos una recapitulación de los elementos teóricos utilizados durante esta investigación, esto con el fin de ganar precisión en algunos aspectos teóricos de la investigación, así como el objeto de estudio. Para finalizar presentaremos una serie de notas donde se expone en forma breve las aportaciones generadas por este trabajo.

La metodología aplicada en el caso presentado en el capítulo 3, el análisis focal, es una herramienta que nos ha permitido identificar los contextos (ya sea gráfico, algebraico o numérico) por los que un estudiante transita durante un proceso de interacción en el que se encuentra involucrada un tarea matemática, aún cuando el estudiante no se refiera explícitamente a estos contextos, por ejemplo, durante el proceso de interacción entre Pablo y Yolanda, al hacer referencia a la actividad I.9, Pablo realiza las siguientes intervenciones:

> [73] si, claramente se observa que en la función 1 mientras la primera derivada antes de a es positiva, despues de a en negativa
>
> [74] y la segunda derivada todo el tiempo es negativa

En este caso, Pablo no podría determinar el signo de la derivada antes y después de *a* haciendo uso de las técnicas y algoritmos de derivación, dado que la gráfica f_1 no tiene una expresión algebraica asociada, ni se establece el dominio de la función. Es así que aunque el foco pronunciado de Pablo no contenga palabras que hagan alusión a elementos gráficos, evidentemente sus afirmaciones se basan en la observación de la gráfica f_1 y en las interpretaciones gráficas que Pablo asocia al concepto de f' y f'' que en este caso podemos asegurar que se trata de rectas tangentes a la curva en el caso de f' y concavidad en el caso de f''.

En el caso de Pablo, el análisis focal nos ha permitido detectar una inclinación por abordar los problemas planteados desde un contexto gráfico, sin que esto le impida trasladarse a otros contextos, como los algebraicos y numéricos.

De la misma manera que el análisis focal nos reveló la facilidad de manejo de los contextos gráficos en Pablo, fue posible localizar cierta debilidad en él al manejar algoritmos como podemos constatar en las enunciaciones [120], [125], [126] y [127] donde intenta aplicar un algoritmo erróneo para determinar los puntos de inflexión de una función; sin embargo, el análisis focal reveló que la capacidad de transitar entre contextos de este estudiante, fue lo que le permitió percatarse de su error al aplicar el algoritmo.

El análisis focal nos permite dar seguimiento a los procesos de interacción desde un punto de vista cognitivo, esto es, es posible obtener una mirada "interna" de los argumentos generados por los estudiantes, conocer en qué aspecto del objeto matemático en cuestión están centrando su atención para emitir una opinión determinada y de esta manera generar explicaciones de a los fenómenos que se presentan en un proceso de interacción. Por ejemplo, una vez que se identificaron debilidades en los contextos no gráficos como el analítico en Pablo, resulta razonable entender porque éste cede a la argumentación presentada por Yolanda a lo largo de las enunciaciones [176] – [198]:

[176] **Yolanda:** ¿Qué argumento diste en le problema 1.10 (f)?

[177] **Pablo:** en el inciso c, falso despues de un minimo local es positiva

[178] **Yolanda:** Y en el f?

[179] **Pablo:** conteste que esto es cierto

[180] **Yolanda:** y por que?

[181] **Pablo:** pues debido a la concavidad, lo que comentabamos anteriormente

[182] **Pablo:** ya que cuando una función tiene un máximo, su concavidad

[183] **Yolanda:** A mi me dio por hacer la demostración de que si la segunda derivada es negativa hay un maximo local y la concavidad es hacia abajo

[184] **Pablo:** es hacia la parte negativa del eje y

[185] **Pablo:** y cómo lo hiciste????

[186] **Yolanda:** Al tener f un máximo local en un punto a, tenemos que f ’ = 0, si ocupamos la definición de derivada:

[187] **Yolanda:** Correción: esta máquina ciertas combinaciones las interpreta con esos signos. Al tener f un maximo local en unpunto a, tenenmos que f ' = 0, si ocupamos la definición de derivada, i.e.,

[189] **Yolanda:** f '' = lim f '(a+h)/h

[190] **Yolanda:** esa carita es (a)

[191] **Pablo:** si no te preocupes

[192] **Yolanda:** continuo, supongamos f ''(a) < 0, entonces[f ' (a+ h)/h] < 0, esto implica dos cosas

[193] **Yolanda:** 1) f ' (a + h)/h >0, para h <0, esto implica que f decrece antes de a

[194] **Yolanda:** 2) f '(a+h)/h < 0, para h > 0, esto implica que f crece antes de a

[195] **Yolanda:** de lo anterior, f tiene un máximo local en a

[196] **Yolanda:** qué tal?, me aluciné?

[197] **Pablo:** siiiiiii

[198] **Pablo:** muy bien

A pesar de que Yolanda presenta a Pablo un argumento matemáticamente erróneo (ver por ejemplo la expresión propuesta para f'' en [189]), Pablo cede ante los argumentos presentados por Yolanda (ver enunciación [198])], pero el análisis focal nos da una posible explicación acerca del por qué de esta situación: Pablo muestra una fortaleza para abordar el concepto de derivada desde un contexto gráfico y además presenta deficiencias en planos analíticos; Yolanda por su parte demuestra que su manejo de aspectos gráficos presenta deficiencias como en el caso en que cuestiona a Pablo sobre los puntos de inflexión en ecuaciones cuadráticas en la enunciación [143]. Estos nos lleva a pensar lo siguiente: en un proceso de interacción, las enunciaciones emitidas por los estudiantes pueden revelarnos el contexto desde el cual el estudiante aborda al concepto aún cuando éste no se explicite en el foco pronunciado. Los contextos que utiliza el estudiante para trabajar el objeto matemático en juego durante una actividad, son aquellos en los que el estudiante tiene un dominio más amplio o en otras palabras, en los que el estudiante logra asociar más significados. En este caso en el que el concepto involucrado es el de derivada de orden superior, hemos visto como los estudiantes asocian elementos gráficos como pendiente y concavidad a los conceptos f' y f'' respectivamente, presentando dificultades para abordar el concepto de f''' y asociando únicamente elementos algebraicos al concepto como lo muestra Yolanda en [81]. Creemos además que cuando un estudiante se ve involucrado en un proceso de interacción en el cual se le presentan argumentaciones en contextos en los que el estudiante no se sienta seguro, es probable que el estudiante ceda a las argumentaciones que sus compañeros presentan. Como podemos apreciar la anterior situación se presenta en el extracto de la interacción citado previamente; además nos inclinamos a pensar que el hecho de que Yolanda presentara sus argumentos en un contexto algebraico le proporciona más “peso” a su argumento, ya que el contexto algebraico es un contexto privilegiado en situación escolar para demostrar y argumentar proposiciones matemáticas.

Algo que es importante señalar, es que el posible efecto de la tecnología, como una herramienta de representación de conceptos matemáticos sobre las interpretaciones que los estudiantes pueden generar en una situación matemática particular debe ser estudiado con más profundidad. Como lo muestran varias investigaciones (ver Artigue, 2002), un software matemático o una calculadora puede influir la forma en que los estudiantes perciben a una entidad matemática; en el caso de la instrucción matemática a distancia, este tipo de herramientas tecnológicas son de uso común, por lo que consideramos se debe estudiar más al respecto. En el caso de las derivadas sucesivas pudimos detectar un momento en el que el estudiante se apoya de un software para afrontar la tarea matemática asignada (ver [122]), desafortunadamente además de este indicio, no existe información que nos ayude a interpretar el efecto de la tecnología en los argumentos generados por Yolanda. Consideramos que este factor, el de la tecnología puede influir radicalmente en la metodología del análisis focal, ya que la tecnología puede incidir directamente en la manera en que los estudiantes perciben a las entidades matemáticas, es decir, en su foco atendido. Dado que los datos que manejamos en nuestro estudio no nos permitieron obtener más información al respecto, consideramos necesario dirigir investigaciones enfocadas en ese sentido.

En el caso de la metodología presentada en el capítulo cuatro, nos hemos centrado en identificar los ostensivos manifestados por los estudiantes al afrontar determinadas tareas matemáticas. El enfocarnos en el análisis de los ostensivos manifestados durante los procesos de interacción nos permitió identificar las *técnicas* empleadas por los estudiantes para resolver las tareas matemáticas, ya que cada una de estas técnicas posee ostensivos asociados por medio de los cuales es posible identificarlas.

Algo que es importante señalar es que los elementos teóricos que sustentan esta metodología, necesitan experimentar ciertas adecuaciones para poder extrapolar esta aproximación teórica al estudio de los fenómenos propios de la Educación Matemática a Distancia. Por ejemplo, en un medio de comunicación propio de la Educación a Distancia como lo son los medios escritos no es posible distribuir a los objetos ostensivos manifestados durante un proceso de interacción en registros ostensivos como el oral o el gestual, además se genera una necesidad de adaptación de los ostensivos gráficos al medio de comunicación virtual, como se puede apreciar en [304], [307] y [310]. Al igual que en el caso del análisis focal, la tecnología juega un papel determinante en los procesos de interacción; en este caso la tecnología fue generadora de ostensivos gráficos que fueron utilizados como herramientas de validación como se puede observar en la intervención realizada por Juan en [320], donde evidentemente Juan valida las propuestas de sus compañeros de acuerdo a la cercanía que tienen las representaciones gráficas de estas propuestas con las gráficas contenidas en la actividad A1.4.

Independientemente de las adecuaciones necesarias para extrapolar esta aproximación teórica al campo de la Educación a Distancia, consideramos que es posible obtener explicaciones de carácter "social" a los fenómenos generados durante los procesos de interacción. Un ejemplo muy interesante es el argumento presentado por Pablo en la parte final de la enunciación [321] al explicar el efecto del parámetro C en la expresión $y = A + Bx + C$. Como hemos mencionado en el capítulo cuatro, Pablo logra identificar la propiedad que ha sido denominada en previas investigaciones como *la linealidad del polinomio*, sin embargo, a pesar de que esta propiedad puede generar información importante sobre el comportamiento de una gráfica polinomial, esta propuesta no logra sobrevivir al proceso de consenso que tiene como finalidad construir una respuesta grupal a la tarea asignada. Si analizamos la propuesta final entregada por el grupo de estudiantes que participan en esta discusión, podremos ver que la propuesta de Pablo fue sustituida por la propuesta presentada por Luis en [326] ¡ a pesar de ser matemáticamente errónea !. Creemos que la propuesta de pablo no sobrevive al proceso de consenso debido a las *relaciones ecológicas de las tareas y las técnicas* (ver Chevallard, 1999); esto es, el argumento utilizado por Pablo donde se refiere a que la parábola "siempre estará recargada sobre la recta *B*x + *A*" no es un discurso tecnológico común en una clase de matemáticas (un discurso que se basa en elementos gráficos), por lo que es posible que a Juan y a Luis no les parezca totalmente comprensible y justificada; en cambio el discurso tecnológico empleado por Luis en [326] hace referencia a técnicas institucionalmente establecidas como el caso de la fórmula $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ y quizás esta explicación haya resultado más familiar para los estudiantes y por lo tanto más fácil de aceptar.

Como lo menciona la TAD, los objetos ostensivos son objetos institucionales; esto lo podemos confirmar al mirar la notación utilizada por el estudiante uruguayo Juan para representar expresiones decimales (ver Figura 7). Esta notación difiere completamente a la utilizada por ejemplo en México y probablemente no sea el único ostensivo que se modifique de institución (didáctica) a institución.

Consideramos que esta clasificación, la de los objetos ostensivos como objetos institucionales, pueden proporcionarnos una explicación al uso discursivo por parte de los estudiantes de metáforas tales como "brazos", "recargada" y otros. Creemos que la ausencia de ostensivos institucionales que permitan a los estudiantes referirse a características o propiedades gráficas que desean comunicar (como lo son "vértice" o "concavidad"), los obliga a generar este tipo de adjetivos como auxiliares en el proceso de comunicación de ideas matemáticas.

Una de las interrogantes planteada al inicio de esta investigación fue, ¿Cómo es el proceso que se lleva a cabo para lograr una respuesta grupal antes de ser presentada al maestro? es decir, ¿Cómo se desarrollan las interacciones del tipo estudiante-estudiante cuando éstos se encuentran resolviendo una actividad matemática que involucra aun objeto matemático particular?. Las interacciones que hemos analizado nos muestran que la naturaleza de las interacciones dependen del medio de comunicación escrita en el cual se desarrollan, esto es, los foros asincrónicos favorecen las intervenciones más detalladas y más profundas en cuanto contenido que las que se generan en un chat. Hemos notado además que independientemente del medio escrito en el que se desarrolle la actividad, el proceso de interacción no nos permite ver con claridad la etapa de acción de los estudiantes sobre la actividad matemática en cuestión, es decir, las interacciones en los foros se centran en etapas de formulación y validación. Estas etapas se ven claramente influidas por elementos tecnológicos tales como las herramientas graficadoras, que pueden funcionar como un elemento de validación o como un auxiliar para realizar conjeturas.

Lo anterior, nos ha llevado a formular una hipótesis que consideramos muy importante: Durante un proceso de interacción en un escenario virtual, los estudiantes involucrados se presentan a la escena de la interacción con formulaciones y preconcepciones sobre la actividad matemática a tratar. Una vez que inicia el proceso de interacción, los estudiantes entran en un proceso de validación o consenso en el cual se confrontan las diferentes formulaciones de los estudiantes, en las que se ponen en juego diferentes propuestas, *técnicas* y *discursos tecnológicos*. Lo interesante del proceso es que no todas las formulaciones de los estudiantes lograrán sobrevivir el proceso de consenso. Pero aquí la pregunta importante es: ¿Cuáles de estas propuestas logran sobrevivir al proceso?. Con base en el análisis de la interacción entre Luis, Pablo y Juan, nos atrevemos a afirmar que aquellas propuestas, técnicas y discursos tecnológicos que más se apeguen al *discurso matemático escolar* son las que tendrán más posibilidad de sobrevivir al proceso de validación presente en los procesos de interacción. De esta manera podemos asegurar que un argumento de tipo algebraico tendrá más posibilidad de ser aceptado que un argumento planteado en un contexto puramente geométrico; de la misma manera que una técnica que sea comúnmente manejada en situación escolar tendrá una probabilidad mayor de ser aceptada por los estudiantes que una técnica "novedosa".

Como podemos apreciar, existe una diferencia cualitativa en el tipo de información que nos puede proporcionar cada uno de los métodos de análisis utilizados. Como lo señala Godino (2002) la TAD se enfoca en los conocimientos institucionales, dejando de lado la cognición individual. En el caso del análisis focal la situación es inversa a ésta. Lo anterior, así como las posibles modificaciones que deben hacerse a estas aproximaciones teóricas para el estudio de los fenómenos de la Educación Matemática a Distancia deben ser tomadas en cuenta y estudiadas a profundidad antes de aplicarlas a cualquier estudio en esta área de investigación.

RECAPITULACIÓN Y NOTAS

La educación a distancia es una forma de instrucción en la que los participantes de esta actividad, ya sean estudiantes o profesores interactúan en torno a un objeto de conocimiento específico a pesar de encontrarse separados físicamente entre sí durante este proceso.

La investigación que hemos presentado se desarrolla justamente en el campo de la educación a distancia, particularmente cuando el objeto de conocimiento en cuestión es de naturaleza matemática, y además cuando la interacción, o más precisamente la comunicación entre los individuos que forman parte de este proceso se desarrolla utilizando herramientas de comunicación escrita mediadas por computadora vía internet.

En esta investigación hemos utilizado dos aproximaciones teóricas disjuntas para estudiar interacciones del tipo estudiante-estudiante al afrontar una tarea matemática particular. Como hemos visto, estas interacciones se desarrollaron utilizando herramientas de comunicación escrita propias de la educación a distancia vía internet como son el chat y el foro asincrónico.

Con la finalidad de efectuar una recapitulación de nuestro trabajo, daremos un recorrido por los componentes básicos de las aproximaciones teóricas utilizadas para posteriormente finalizar con un conjunto de observaciones sobre lo que hemos llamado la *educación matemática a distancia*, basándonos en la información obtenida de la investigación. Comenzaremos este recorrido con los elementos teóricos principales que fundamentan el análisis focal.

Sobre el Análisis Focal

Esta herramienta metodológica denominada Análisis Focal forma parte de lo que Sfard (2002) denomina la *aproximación comunicacional a la cognición* (communicational approach to cognition). La autora trata de complementar la visión compartida por varios investigadores acerca del aprendizaje, el cual es concebido como el almacenamiento de información en la forma de representaciones mentales, es decir, se entiende al aprendizaje como una *adquisición* que implícitamente posee una naturaleza individual. Sfard se refiere al entendimiento como una forma de conocimiento, donde el conocimiento mismo es concebido como un objeto que una persona posee o no posee, y el aprendizaje es considerado como el proceso de adquirir este objeto.

La postura asumida por Sfard relaciona al aprendizaje con el desarrollo de las formas en las cuales un individuo participa en actividades comunales bien establecidas. Se ve al aprendizaje como el ingreso a cierta práctica humana, donde se cambia el énfasis a la sociedad, concebida como el escenario que produce y mantiene esta práctica (Sfard, 2002; p. 25). Es así que se concibe al aprendizaje dentro de una sociedad, estimulado por la necesidad de interacción y comunicación.

Así, la necesidad de comunicación se plantea como propia del ser humano y se afirma además que *el pensamiento debe ser concebido como un caso de comunicación*, una comunicación con uno mismo donde nos informamos, razonamos, nos planteamos preguntas y esperamos por nuestras propias respuestas. El concepto de comunicación es definido por Sfard como el intento de una persona de lograr que un interlocutor actúe, piense o sienta de acuerdo a sus intenciones.

Dentro de este marco conceptual el elemento de estudio es el *discurso*, el cual denota cualquier caso de comunicación ya sea diacrónica o sincrónica, ya sea con otros o con uno mismo, predominantemente verbal o con la ayuda de cualquier otro sistema simbólico (*Idem*, p. 28).

De esta manera Sfard se refiere al aprendizaje de matemáticas como una iniciación al discurso matemático, esto es, una iniciación a una forma especial de comunicación conocida como matemática. Uno de los elementos centrales en el análisis del pensamiento como una forma de comunicación es lo que la investigadora denomina *herramientas de mediación* las cuales podemos definir como aquellas herramientas simbólicas utilizadas en el proceso de comunicación (en el caso de matemáticas podemos mencionar la notación algebraica, las gráficas, la notación numérica, etc.). En el caso de nuestra investigación, hemos centrado la atención en estas herramientas de mediación debido a nuestro interés en comprender los procesos de comunicación e interacción producidos en escenarios de educación a distancia cuando se utilizan herramientas de comunicación escrita. Como consecuencia de lo anterior en nuestra investigación utilizamos el tipo de análisis propuesto para estudiar estas herramientas de mediación, este análisis es el que hemos denominado análisis focal.

El análisis focal pretende estudiar el foco discursivo dentro de un proceso de comunicación. La palabra foco es definida por Sfard como la expresión usada por un interlocutor para identificar el objeto de su atención. En un intento por explicar cómo es atendido el objeto (mirándolo, escuchándolo, etc) y qué parte del objeto es atendida, se generó la necesidad de dividir el concepto de foco en tres componentes: el foco pronunciado, el foco atendido y el foco proyectado.

Un último concepto que nos parece muy importante de mencionar, ya que relaciona al concepto de foco discursivo con el de comunicación, es el de *efectividad de comunicación.* La efectividad de comunicación está directamente relacionada con el grado de claridad del foco discursivo, es decir, la comunicación no se puede considerar efectiva si todos los participantes de este proceso no tienen claro de lo que están hablando y no están seguros de que sus compañeros se refieren a las mismas cosas cuando usan las mismas palabras.

Consideramos que era posible llevar un análisis de esta naturaleza a los escenarios propios de la educación a distancia ya que el concepto de discurso previamente mencionado, podía ser identificado en el campo de la educación a distancia, al igual que cada uno de los focos que componen al foco discursivo, aunque el discurso en este caso se desarrollara en forma escrita.

El hecho de haber aplicado el análisis focal a una interacción desarrollada en un foro de discusión sincrónica no responde a una razón particular. Simplemente se buscaba que los estudiantes se involucraran en un proceso de interacción alrededor de un concepto matemático particular, que en este caso fue el de la derivada. Una manera de lograr esta interacción fue sugiriendo el uso de un chat, quizás un poco para analizar las facilidades de interacción de esta herramienta de comunicación virtual.

A pesar de que la comunicación entre los estudiantes no fue verbal, fue posible identificar los tres componentes del foco discursivo (foco pronunciado, atendido y proyectado) en el discurso escrito de los estudiantes. Esto nos permitió identificar en qué parte del objeto matemático derivada los estudiantes centraban su atención al momento de hacer referencia a éste. A pesar de que las actividades que se presentaron a los estudiantes estaban expresadas mayoritariamente en un contexto gráfico, los estudiantes evocaron características no gráficas del concepto, pero sus mayores dificultades de interpretación de éste se presentaron precisamente en el contexto gráfico. Con base en estas observaciones, el análisis focal nos ha permitido generar explicaciones a *fenómenos didácticos* identificados durante el proceso de interacción como lo es la aceptación por parte de uno de los estudiantes a formulaciones matemáticamente erróneas. Creemos que este tipo de situaciones se puede presentar cuando la argumentación errónea presentada se desarrolla en un contexto (ya sea gráfico, numérico, algebraico o analítico) que el interlocutor del proponente desconoce o no domina.

Sobre los objetos ostensivos y no ostensivos

La categoría teórica de los objetos ostensivos y no ostensivos, se encuentra insertada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En esta aproximación se considera al saber matemático como una forma particular de conocimiento que es fruto de la acción humana institucional, es decir, se produce, se utiliza y se enseña (o más generalmente se transpone) en las instituciones.

Otro concepto central dentro de esta teoría y fundamental para nuestra investigación es el concepto de *praxeología matemática*. Como se ha mencionado en el punto 2.1 del presente trabajo, una praxeología matemática es el conjunto de técnicas tecnologías y teorías organizadas alrededor de un tipo de tarea específico. De esta manera, al cuestionarse sobre la naturaleza de un objeto matemático, la respuesta se convierte en un problema de la descripción de las prácticas institucionales en las que el objeto está involucrado, un problema que se puede responder en términos de organizaciones praxeológicas (Bosch & Chevallard, 1999; p. 88).

Por otro lado, si quisiéramos definir brevemente el concepto de objetos ostensivos, podríamos decir simplemente que se tratan de representaciones de ideas, intuiciones y conceptos matemáticos, que gozan de una realidad perceptible como los grafismos, los sonidos y los gestos. Esta breve definición corre el riesgo de que se interprete a los objetos ostensivos como representaciones de objetos matemáticos en el sentido de otros investigadores que han hecho importantes contribuciones al estudio de las representaciones como Raymond Duval o Gérard Vergnaud, sin embargo Bosch y Chevallard consideran que existen diferencias. Estas diferencias radican en el status que se le otorga a las representaciones dentro de la actividad matemática. Miremos por ejemplo la siguiente cita de Duval:

> “ l’accomplissement d’une tâche mathématique implique la mobilisation d’un fonctionnement cognitif. Dans les tâches proposées aux élèves, il faut donc d’une part bien distinguer la tâche proprement mathématique et la tâche cognitive et, d’autre part, examiner l’implication réelle de la tâche mathématique dans la tâche cognitive. Cela veut dire que ces deux types de tâche ne sont pas en fait séparables mais qu’ils peuvent être analysés de deux points de vue différents ” (Duval, 1996 ; p. 375)

Como se señala en Bosch & Chevallard (1999), en el caso particular de Duval las representaciones no son integradas en la descripción del saber matemático en tanto objetos matemáticos, no son consideradas como parte de los conocimientos matemáticos o de la actividad matemática, sino únicamente como ingredientes matemáticamente contingentes, pero necesarios para el funcionamiento cognitivo subyacente a esta actividad.

Por su parte, la postura teórica introducida por Vergnaud y denominada la teoría de los campos conceptuales considera a la actividad lingüística y simbólica como externa a la actividad matemática:

> “ Le symbolisme mathématique n’est à rigoureusement parker ni une condition nécessaire ni une condition suffisante de la conceptualisation : mais il contribue utilement à cette conceptualisation, notamment pour la transformation des catégories de pensées mathématiques en objets mathématiques. Le langage naturel est le moyen essentiel de représentation et d’identification des catégories mathématiques, mais il ne posséde pas, autant que les diagrammes, les formules et les equations, le laconisme

> indispensable à la sélection et au traitement des informations et des relations pertinentes ” (Vergnaud, 1990 ; p. 166)

En la TAD los objetos ostensivos constituyen la materia prima de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías de las distintas organizaciones praxeológicas. Esta aproximación teórica propone un modelo de la actividad matemática que integra a los objetos ostensivos como constituyentes de la base de un saber matemático que se puede describir en términos de organizaciones praxeológicas. Así, la TAD asegura que la co-activación de objetos ostensivos y no ostensivos está siempre presente y aparece en todos los niveles de la actividad matemática. Estos ostensivos se manifiestan en diferentes registros ostensivos como el oral, el gesticular y el escrito. Considerando lo anterior, una de nuestras interrogantes era ¿Qué pasa con los objetos ostensivos manifestados cuando los estudiantes afrontan una actividad matemática utilizando una herramienta de comunicación escrita?. Como respuesta encontramos que los ostensivos algebraicos sufren de modificaciones para poder ser representados en estos medios; además notamos que aunque el medio de comunicación utilizado por los estudiantes era un medio escrito, ellos eran capaces de articular un “discurso gráfico”, el cual es un discurso escrito que les permite describir características puntuales y globales de la representación gráfica de una expresión algebraica particular. Otro descubrimiento fue que el medio escrito facilita la utilización de símbolos dentro del discurso de los estudiantes, los cuales serían imposible de utilizar en un discurso oral como por ejemplo el símbolo 45°. Finalmente, algo que es importante de señalar, es que al parecer los estudiantes prefieren a los ostensivos algebraicos sobre los ostensivos gráfico (en el sentido anteriormente señalado) para articular sus discursos tecnológicos.

Sobre las aportaciones de la investigación a la educación a distancia

- **Sobre la tecnología**

Aunque la investigación no proporcionó evidencias contundentes al respecto, nos inclinamos a pensar que la tecnología (nos referimos en particular al software matemático utilizado por algunos estudiantes) puede cambiar la forma en que los estudiantes acceden, perciben y comunican los conceptos matemáticos e influir sus procesos de validación presentes en los procesos de interacción. Percibimos la necesidad de más trabajos de investigación en este sentido.

- **Sobre los medios de comunicación escritos**

A pesar de que no se tuvo un criterio bien definido para discernir entre la utilización de un foro asincrónico o un foro sincrónico (chat) durante la aplicación de las diferentes posturas teóricas; nuestra experiencia en el presente trabajo nos hace compartir la opinión de otros investigadores en el área de educación a distancia acerca de la facilidad de reflexión que ofrecen los foros asincrónicos. Dados los tiempos de respuesta requeridos para participar en una discusión asincrónica, creemos que este tipo de herramienta de comunicación escrita es la más adecuada para desarrollar interacciones que involucren algún concepto matemático en particular.

También es importante señalar, que a pesar de que los medios de comunicación escrita no poseen herramientas de comunicación tales como el recurso oral o la gesticulación, esto no impide que los estudiantes puedan comunicar características gráficas, numéricas o algebraicas de los objetos matemáticos.

- **Sobre la investigación en educación matemática a distancia**

La educación matemática a distancia es sin lugar a dudas un campo fértil para la investigación en Matemática Educativa, sin embargo debemos poner especial atención al aspecto teórico de nuestras investigaciones, ya que dada la naturaleza y complejidad de la matemática y de los fenómenos didácticos que se generan alrededor de ésta, es muy probable que las herramientas teóricas y metodológicas diseñadas por investigadores en el área de educación a distancia sean insuficientes o inadecuadas para el tipo de problemática que se desea estudiar en la educación matemática a distancia. Es así que debemos enfocar nuestros esfuerzos en generar perspectivas teóricas que permitan dar respuesta a los nuevos fenómenos didácticos presentes en los escenarios virtuales de instrucción, o bien, intentar extender y adecuar las teorías ya existentes a esta área de investigación.

- **Sobre los procesos de interacción estudiante-estudiante**

En los dos casos de interacción que hemos presentado hemos visto cómo durante los procesos de interacción entre estudiantes se privilegian los contextos analítico y algebraico como herramientas de argumentación, originando en algunos casos conclusiones matemáticamente erróneas por parte de los estudiantes. Es probable que una mayor movilidad entre contextos (gráfico, numérico, algebraico) pudiera ayudar a los estudiantes en este sentido. Es aquí que la tecnología puede jugar un papel muy importante como un generador y procesador de representaciones que permita explorar a los estudiantes contextos usualmente desfavorecidos en el discurso matemático escolar. Se requiere mayor investigación al respecto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANUIES (2001). Diagnóstico de la Educación Superior a Distancia. México: ANUIES.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 245 – 274.

Bosch, M. (1994). Les instruments du travail mathématique: le cas de la proportionnalité. En M. Artigue *et al*. (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. La Pensée Sauvage, Grenoble, Francia.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathematique aux ostensifs. Objet d'etude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(1), 77 – 124.

Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2003). El Profesor como Director de Procesos de Estudio: Análisis de Organizaciones Didácticas Espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques 23*(1), 79 – 136.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics 1970 – 1990*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis. *Epsilon 42*, 353 – 369.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R. A. & Garza, A. (2000). Desarrollo del Pensamiento Matemático. México: Editorial Trillas.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático. Edición especial CASIO. México: Pearson Educación.

Castañeda, A. (2003). Actividades para el curso "Teorías y perspectivas de la didáctica de las matemáticas. México: Cicata-IPN, publicaciones internas.

Chevallard, Y. (1992). Concepts Fondamentaux de la Didactique: Perspectives Aportes par une Approche Anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12*(1), 73 – 112.

Chevallard, Y. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petit x* 42, 33 – 57.

Chevallard, Y. (1997). Familière et Problématique. La Figure du Professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques 17*(3), 17 – 54.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). *Estudiar Matemáticas. El Eslabón Perdido entre Enseñanza y Aprendizaje*. México: Biblioteca del Normalista, SEP.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y Análisis: El caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*, 56 – 74.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques 16*(3), 349 – 382.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22*(2.3), 237 – 284.

González, R. (1999). *La Derivada como una Organización de las Derivadas Sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.

Gunawardena, C. N., Lowe, C. A. & Anderson, T. (1997). Analysis of a Global Online Debate and the Development of an Interaction Analysis Model for Examining Social Construction of Knowledge in Computer Conferencing. *Journal of Educational Computing Research 17*(4), 397 – 431.

Gunawardena, C. N. & McIsaac, M. S. (1996). Distance Education. En D.H. Jonassen (Ed.). *Handbook of Research for Educational Communications and Technology: A Project of the Association for Educational Communications and Technology*. (pp. 403 – 437). New York: Simon & Schuster Macmillan. [En línea]. Obtenido en diciembre de 2002 de la dirección: http://seamonkey.ed.asu.edu/~mcisaac/dechapter

Hara, N. (2002). Analysis of Computer-Mediated Communication: Using Formal Concept Analysis as a Visualizing Methodology. *Journal of Educational Computing Research 26*(1), 25 – 49.

Hirumi, A. (En prensa). A Framework for Analyzing, Designing and Sequencing Planned Elearning Interactions. Quarterly Review of Distance Education [En línea] Obtenido en noviembre de 2002 de: http://elearning.inst.cl.uh.edu/elearning/designofwbl.html

Jean, S. (2000). *PÉPITE : un système d'assistance au diagnostic de compétences,* Tesis de Doctorado. Université du Maine, Francia. [En línea] Obtenido en junio de 2003 de la dirección: http://www710.univ-lyon1.fr/~sdaubias/these_HTML/soutenance/

Lapadat, J. C. (2002). Written Interaction: A Key Component in Online Learning. Journal of Computer-Mediated Communication 7(4) [En línea] Obtenido en diciembre de 2002 de la dirección: http://www.ascusc.org/jcmc/vol7/issue4/lapadat.html

Masseux, N. (2000). Enseigner a distance en regulant l’interaction élève/environnement d’apprentissage multimodal. *Colloque sur la multimodalité, IMAG, Grenoble, Francia.* [En línea]. Obtenido en mayo de 2003 de la dirección: http://www.irit.fr/M3/CM10ans/Articles/Masseux.pdf

McClain, K. & Cobb, P. (2001). An Analysis of Development of Sociomathematical Norms in One First-Grade Classroom. *Journal for Research in Mathematics Education 32*(3), 236-266.

Montiel, G. (2002). *Una Caracterización del Contrato Didáctico en un Escenario Virtual*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.

Moore, M.G. (1989). Editorial: Three Types of Interaction. *The American Journal of Distance Education*. *3*(2), 1 – 6 [En línea] Obtenido en diciembre de 2002 de la dirección: http://www.ajde.com/Contents/vol3_2.htm#editorial

Mortera-Gutierrez, F. (2002). Instructor Interactions in Distance Education Environments. *Journal of Interactive Learning Research 13*(3), 191 – 209.

Nanard, J. (1990) *La manipulation directe en interface homme* – machine. Tesis de Estado. Université de Montpellier II, Francia.

Oktaç, A. (2001). The Teaching and Learning of Linear Algebra: Is it the same at a distance? En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, vol. 2* (pp. 501-506). Melbourne, Australia.

Pena-Shaff, J., Martín, W. & Gay, G. (2001). An Epistemological Framework for Analyzing Student Interactions in Computer-Mediated Communication Environments. *Journal of Interactive Learning Research 12*(1), 41 – 68.

Reynolds, F. J. & Reeve, R. A. (2002). Gesture in Collaborative Mathematics Problem-Solving. *Journal of Mathematical Behavior* 20, 447 – 460.

Sfard, A. (2000). Steering (Dis)Course Between Metaphors and Rigor: Using Focal Analysis to Investigate an Emergence of Mathematical Objects. *Journal for Research in Mathematics Education 31*(3), 296 – 327.

Sfard, A. (2001). There is More to Discourse Than Meets the Ears: Looking at Thinking as Communicating to Learn More About Mathematical Learning. *Educational Studies in Mathematics 46*, 13 – 57.

Sierpinska, A. (1997). Formats of Interaction and Model Readers. *For the Learning of Mathematics 17*(2), 3 – 11.

Soury-Lavergne, S. (1998). Étayage et explication dans le préceptorat distant, le cas de TéléCabri. Tesis de Doctorado no publicada. Laboratoire Leibniz IMAG CNRS, Francia. [En línea]. Obtenido en marzo de 2002 de la dirección:
http://www-leibniz.imag.fr/Did@TIC/SouryLavergne/TheseSSL.pdf

Sutherland, R. & Balacheff, N. (1999). Didactical Complexity of Computational Environments for the Learning of Mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 4, 1 – 26.

Tuovinen, J. E. (2000). Multimedia Distance Education Interactions. Education Media Internacional 37(1), 16 – 24.

Valero, S. (2000). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de Maestría no publicada. ITESM, México.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champú conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(2.3), 133 – 170.

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Zill, D. G. (1987). Cálculo con Geometría Analítica. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

ANEXO 1.

REGISTRO COMPLETO DE LA INTERACCIÓN ANALIZADA EN EL CAPÍTULO TRES

REGISTRO COMPLETO DE LA INTERACCIÓN

[1] **Yolanda:** Que tal?

[2] **Pablo:** ¡hola!

[3] **Pablo:** todo listo

[4] **Yolanda:** Si, todo listo

[5] **Pablo:** empezamos o esperamos a los otros

[6] **Yolanda:** Faridi me parece muy dificil que esté con nosotros, pues hasta ahorita que estaba viendo mi correo, que le envie el miercoles, me pide dia y hora, pero me lo enviio ayer, no tiene messenger y no sé si enviandole un correo ahorita se nosp ueda unir, como ves?

[7] **Pablo:** bueno

[8] **Yolanda:** De hugo no sé nada, le envié un correo con el día y hora, pero no ha contestado

[9] **Yolanda:** Aunque él si tiene dirección en hotmail

[10] **Pablo:** pues si quieres enviale un nuevo mensaje y empezamos

[11] **Yolanda:** Ya hecho. Empecemos. ¿qué problema quieres ver primero?

[12] **Pablo:** los recomendados por mario

[13] **Yolanda:** Son los 1.6 y 1.9

[14] **Yolanda:** del primera parte, pero podemos ver también de la segunda

[15] **Yolanda:** El 1.6 es el de la gráfica encerrada en un intervalo

[16] **Yolanda:** Sigues ahí?

[17] **Pablo:** pues antes de hacer la gráfica en el problema 1.6 se logra observar que todos los puntos son negativos, por lo que se cumple que

[18] **Pablo:** que cuando una función es concava hacia abajo, es decir

[19] **Pablo:** dirige su concavidad hacia la parte negativa de las y

[20] **Yolanda:** Buen, a mi me ayudo la gráfica, de entrada te dice mucho, ya cuando la pones en el intervalo, pues no consideras como funciona por otro lado, y se refuerza la información cuando nos dicen que las segundas derivadas, en todos los puntos que nos mencionan son negativas

[21] **Pablo:** por otro lado si te das cuenta mientras la función crece hacia las "y" positivas y luego decrece, su segunda derivada en este caso hace lo contrario

[22] **Yolanda:** No, lo que te da la dirección de la concavidad es la segunda derivada, lo que la hace negativa es la función

[23] **Yolanda:** Si te fijas en los puntos, -1/3 y 1/3, ambas tienen, gráficamente el mismo valor en y

[24] **Yolanda:** y el mismo signo en la segunda derivada

[25] **Yolanda:** por los datos evaluados ya dados por el problema

[26] **Pablo:** si lo que confirma lo que te dije

[27] **Pablo:** mientras la funcion original crece simetricamente, parece que la segunda derivada decrece tambien de la misma forma

[28] **Yolanda:** Bueno, ..., ¿crees que sea necesario dar el intervalo en el eje Y?

[29] **Yolanda:** De todas formas te limita más el eje X

[30] **Pablo:** si creo que si

[31] **Yolanda:** ¿por qué es necesario?, i.e., en ningun momento tocas los limites del intervalo en el eje Y

[32] **Pablo:** no creo que sea necesario

[33] **Yolanda:** Aahhh, Bien. Pasamos al 1.9?

[34] **Pablo:** si

[35] **Pablo:** aqui me asalto una duda

[36] **Yolanda:** ???

[37] **Pablo:** fijate bien en la función a y parece un semicirculo y no una parábola

[38] **Yolanda:** Sí

[39] **Pablo:** y me pregunte si le permito un crecimiento mayor dejara de ser función en algun momento????

[40] **Pablo:** pienso que probablemente si

[41] **Pablo:** y tu????

[42] **Yolanda:** Puede ser, pero no hay ningún problema, pues lo analizas por partes

[43] **Yolanda:** Te fijas en los intervalos, si es función o no,

[44] **Yolanda:** Suponte que sea una circunferencia

[45] **Yolanda:** y la tienes completa

[46] **Yolanda:** Bueno, pues no puedes hacer la gran cosa, pue sno es función

[47] **Yolanda:** La forzas a que no lo sea, ¿cómo?, limitándola

[48] **Yolanda:** El definir un intervalo te ayuda a resolver problemas

[49] **Yolanda:** como este

[50] **Yolanda:** Ahora, que pensandolo unpoco

[51] **Yolanda:** Hay muchas cosas que hacen los ingenieros, que están mal

[52] **Pablo:** creo que tienes razón pero como lo separas

[53] **Pablo:** ???

[54] **Yolanda:** i.e., matematicamente mal, pero como les funcionan practicamente, lo hacen

[55] **Pablo:** que es i.e???

[56] **Yolanda:** i.e.= es decir; tambien podemos usar v.g.: por ejemplo,.

[57] **Yolanda:** Corrección v.gr., verbigracia

[58] **Pablo:** gracias

[59] **Yolanda:** Sigo con mi idea, v.gr., como cuando tienen el d/dx, y pasan el dx al otro lado de la ecuación, despues del signo de igualdad

[60] **Pablo:** si

[61] **Yolanda:** Ahora, conlo que decías, ¿cómo lo separas?, le puedes poner límite en el eje de las Y

[62] **Pablo:** si es cierto tienes razón

[63] **Yolanda:** No esl o común, para graficar lo acotas en el eje X,pero tambien lo puedes hacer en el eje Y. Sobre todo, no lo puedes hacer si estas en le nivel secundaria

[64] **Yolanda:** Los de bachillerato tienen menos problema

[65] **Pablo:** si

[66] **Pablo:** bueno continuando

[67] **Pablo:** que observaste en la función a

[67] **Pablo:** perdón en la función 1

[68] **Yolanda:** Me parece interesantes esta combinaciones

[69] **Yolanda:** Se las puedes poner a los muchachos para que ellos las discutan

[70] **Yolanda:** Es un buen ejercicio

[71] **Pablo:** si

[72] **Yolanda:** POr lo demas, pues no presentan grandes problemas

[73] **Pablo:** si, claramente se observa que en la función 1 mientras la primera derivada antes de a es positiva, despues de a en negativa

[74] **Pablo:** y la segunda derivada todo el tiempo es negativa

[75] **Yolanda:** Si, así es. ¿cómo sería la tercera derivada de esto?

[76] **Yolanda:** Tienes alguna idea?

[77] **Pablo:** no

[78] **Yolanda:** Esa pregunta a mi mecauso problemas

[79] **Pablo:** y tú??

[80] **Pablo:** pero esperame tantito y te contesto

[81] **Yolanda:** Lo único que puedo saber de la tercera derivada es que vas disminuyendo de grado la ecuación

[82] **Yolanda:** 8:40, que no significa nada, pero solo para saber qué ritmo llevamos (??)

[83] **Pablo:** vamos bien

[84] **Yolanda:** Bien

[85] **Pablo:** fijate que cuando observamos encontrar un punto de inflexion

[86] **Pablo:** tenemos que resolver la segunda derivada hallando valores dex

[87] **Pablo:** y luego esos valores sustituirlos en la tercera derivada

[88] **Pablo:** y las raices que no anulan a la tercera derivada hay inflexión

[89] **Yolanda:** SI, ya sé a qué método te refieres, te vas fijando en los cambios de signos

[90] **Pablo:** aja

[91] **Pablo:** en este caso ocurren cosas interesantes

[92] **Yolanda:** Por alguna causa, no me gustan esos métodos

[93] **Pablo:** fijate la f1

[94] **Yolanda:** qué hay con ella?

[95] **Pablo:** si fuera cuadratica su tercera derivada

[96] **Pablo:** seria cero

[97] **Yolanda:** Sí, así es

[98] **Pablo:** por lo que inmediatamente nos damos cuenta que no hay punto de inflexión

[99] **Pablo:** pero y si fuera una función con exponente 4 o cualquiera con exponente par mayor que dos

[100] **Pablo:** entonces si tendriamos que analizar y utilizar el metodo antes mencionado

[101] **Pablo:** y encontrariamos que cada raíz de la segunda derivada

[102] **Yolanda:** Sí,tienes razón

[103] **Pablo:** anularia la tercera derivada

[104] **Yolanda:** A lo que me refiero es que, este analisis es gráfico, el que pide el problema 1.9, para hacer lo que dices, deberíamos tener la función ya conocida

[105] **Pablo:** si

[106] **Pablo:** y que deduces de ella

[107] **Yolanda:** Gráficamente, no me parece fácil, de hehco, yo no puedo decir nada, sobre la tercera derivada

[108] **Yolanda:** no sé, pósiblemente me falten elementos, y tu?

[109] **Pablo:** a mi también pero si nos vamos

[110] **Pablo:** de lo fácil a lo complejo...

[111] **Pablo:** entonces veriamos que mientras a y d presentan terceras derivadas anuladas es decir igual a cero

[112] **Pablo:** b y c serian funciones ..

[113] **Pablo:** que presenten una linealidad

[114] **Pablo:** es decir el analisis lo hago

[115] **Pablo:** partiendo de que una es la derivada de la anterior

[116] **Pablo:** y asi va cambiando el tipo de función en forma gradual

[117] **Pablo:** es decir su exponente disminuye

[118] **Pablo:** con forme derivamos

[119] **Yolanda:** Entiendo los tres ultimos mensajes, no lo anterior, qué quiere decircon que b y c presentan linealidad?

[120] **Pablo:** si fijate que si la función fuera cubica su tercera derivada sería una recta paralela al eje x

[121] **Yolanda:** Sí, así es

[122] **Yolanda:** Estoy buscando excel una posible función

[123] **Pablo:** por lo que surge otra duda ahora que lo mencionas

[124] **Yolanda:** ????

[125] **Pablo:** esto indicaria que ningún valor de la segunda derivada

[126] **Pablo:** anularia a la tercera derivada

[127] **Pablo:** por lo que todos los puntos te indican inflexión

[128] **Pablo:** ????

[129] **Pablo:** o para eso te apoyas de la primera derivada???

[130] **Pablo:** si no hay cambio de signo en algún punto hallado por esta

[131] **Pablo:** entonces haces el analizis mencionado verdad...

[132] **Pablo:** y observas que ningún punto de la segunda derivada anula a la tercera derivada

[133] **Yolanda:** No, no hay cambio de signo, eso es en lo que te fijas cuando usas la tercera derivada, si no hay cambio de signo, como en el caso de una constante sólo te dices que tu ecuación es cuadratica, que ya lo sabias, pero no te dice más

[134] **Yolanda:** Ese método esta bien, para cierto tipo de funciones

[135] **Yolanda:** Viendo un poco qué es la tercera derivada, no te sirve para

[136] **Yolanda:** casos de funciones de grado menor o igual a 2

[137] **Yolanda:** Y no te sirve en el sentido de que no te dice algo que desconozcas

[138] **Pablo:** tienes toda la razon

[139] **Pablo:** pero si te das cuenta ninguno de esos casos tiene punto de inflexión

[140] **Yolanda:** Me esperas 5 minutos?, me estan llamando

[141] **Pablo:** sale

[142] **Yolanda:** Aquí estoy

[143] **Yolanda:** Como?, no hay punto de inflexión en algunas ecuaciones cuadraticas?

[144] **Pablo:** no no lo hay

[145] **Pablo:** o si????

[146] **Yolanda:** Y la parabola?

[147] **Yolanda:** no tiene un maximo o un minimo

[148] **Pablo:** si pero eso es otra cosa

[149] **Pablo:** se dice que existe un punto de inflexión

[150] **Pablo:** cuando la función cambia su concavidad

[151] **Pablo:** y una parabola siempre sera concava o convexa según sea el caso

[152] **Yolanda:** En verdad?, no me acuerdo de esa definición, yo pensaba que estaba en función del signo de la primera derivada

[153] **Pablo:** no

[154] **Yolanda:** Pero seguramente tienes razón, hace mucho tiempo que toco esos temas

[155] **Yolanda:** y las definiciones posiblemente las esté confundiendo

[156] **Yolanda:** Correción: hace tiempo que NO toco esos temas

[157] **Yolanda:** Pero pensandolo un poco más: una ec, de segundo grado va a ser un trozo de parabola trasladada

[158] **Pablo:** la primera derivada te indica si hay cambio en el signo de las pendientes de las rectas tangentes y si no hay cambio de signo, probablemente se tengas un punto de inflexión

[159] **Yolanda:** Si, ya pensandolo un poco mas, tienes razón

[160] **Pablo:** oye y si grabamos esta parte y la enviamos

[161] **Pablo:** tu sabes hacerlo????

[162] **Yolanda:** No, pensaba que tu sabias, voy a intentar copiar lo que llevamos a Word.

[163] **Pablo:** si

[164] **Pablo:** yo lo copie

[165] **Pablo:** y lo guarde

[166] **Yolanda:** Si, yo tambien. Vaya, es facil

[167] **Yolanda:** Para el problema 1.10, la pregunta ¿qué argumento diste?

*(En este momento alguno de los participantes se desconecta de la red)

[168] **Yolanda:**Sigues ahí?

[169] **Pablo:** si

[170] **Yolanda:** Qu´é pasó, te desconectaste?

[171] **Yolanda:** Yo me desconecte or un momento,

[172] **Pablo:** no creo que fuiste tú

[173] **Pablo:** porque yo e estado aquí

[174] **Yolanda:** Yo también, y luego ya no te vi mas. Bueno, viste mi ultima pregunta?

[175] **Pablo:** no

[176] **Yolanda:** ¿Qué argumento diste en le problema 1.10 (f)?

[177] **Pablo:** en el inciso c, falso despues de un minimo local es positiva

[178] **Yolanda:** Y en el f?

[179] **Pablo:** conteste que esto es cierto

[180] **Yolanda:** y por que?

[181] **Pablo:** pues debido a la concavidad, lo que comentabamos anteriormente

[182] **Pablo:** ya que cuando una función tiene un máximo, su concavidad

[183] **Yolanda:** A mi me dio por hacer la demostración de que si la segunda derivada es negativa hay un maximo local y la concavidad es hacia abajo

[184] **Pablo:** es hacia la parte negativa del eje y

[185] **Pablo:** y cómo lo hiciste????

[186] **Yolanda:** Al tener f un máximo local en un punto a, tenemos que f' = 0, si ocupamos la definición de derivada:

[187] **Yolanda:** Correción: esta máquina ciertas combinaciones las interpreta con esos signos. Al tener f un maximo local en unpunto a, tenenmos que f' = 0, si ocupamos la definición de derivada, i.e.,

[189] **Yolanda:** f" = lim f'(a+h)/h

[190] **Yolanda:** esa carita es (a)

[191] **Pablo:** si no te preocupes

[192] **Yolanda:** continuo, supongamos f"(a) < 0, entonces[f' (a+ h)/h] < 0, esto implica dos cosas

[193] **Yolanda:** 1) f' (a + h)/h >0, para h <0, esto implica que f decrece antes de a

[194] **Yolanda:** 2) f'(a+h)/h < 0, para h > 0, esto implica que f crece antes de a

[195] **Yolanda:** de lo anterior, f tiene un máximo local en a

[196] **Yolanda:** qué tal?, me aluciné?

[197] **Pablo:** siiiiii

[198] **Pablo:** muy bien

[199] **Yolanda:** Si, ya cuando lo habia enviado, me puse a pensar que me habia pasado de lista

[200] **Yolanda:** Bueno, pasamos a los problemas de la segunda parte?

[201] **Pablo:** si, cuál sugieres????

[202] **Yolanda:** No sé

[203] **Pablo:** qué tipo de figura dibujaste en la secuencia 3 planteamiento de un escenario

[204] **Yolanda:** En el de Anahí?

[205] **Pablo:** no, la secuencia 3 de EXAMINANDO EL LLENADO DE RECIPIENTES

[206] **Yolanda:** Como una copa

[207] **Pablo:** verdad yo tambien

[208] **Yolanda:** o un cono de nieve, pero en dos partes

[209] **Pablo:** si justo asi lo dibuje

[210] **Pablo:** y si lo comparas con la gráfica

[211] **Pablo:** tiene formas similares

[212] **Pablo:** solo que a la mitad

[213] **Pablo:** me imagino que ese comentario van a hacer cuando lo revisen

[214] **Pablo:** cual crees que es la finalidad de esta actividad?????

[215] **Pablo:** que pretenden que aprendamos

[216] **Pablo:** porqué en la anterior era la localización de puntos de inflexión

[217] **Pablo:** pero aquí

[218] **Pablo:** cuál crees que sea????

[219] **Yolanda:** No lo sé, por que poarece que no tiene hilación con lo demas o con el tema de este curso

[220] **Pablo:** yo creo que tiene que ver con lo mismo pero desde otra perspectiva

[221] **Pablo:** si observas tambien nos ayudan a encontrar los puntos de inflexión pero con las subtangentes

[222] **Pablo:** este tipo de actividades las tendremos que diseñar nosotros

[223] **Pablo:** para crear un conocimiento significativo en los muchachos

[224] **Yolanda:** Si, pero va con lo que leimos?

[225] **Pablo:** en cierta forma si

[226] **Yolanda:** A mi me sirvio, porque ya desde otro punto de vista ya piensas en como loven los muchachos

[227] **Pablo:** segun los problemas de freudenthal

[228] **Yolanda:** A mi se me ocurria, en estos paseos de Anahí

[229] **Yolanda:** hacerlo con animación y al lado una gráfica

[230] **Yolanda:** eso debe ayudar

[231] **Yolanda:** Y si se menciona como un problema, pero

[232] **Yolanda:** estamos bien teoría,

[233] **Yolanda:** coreción, estamos haciendo teoria

[234] **Pablo:** yo creo que si, pero a lo mejor seria más enriquecedor, con un radar que detectara los movimientos

[235] **Yolanda:** sería algo interesante

[236] **Pablo:** pues si creo que si

[237] **Pablo:** son las 10:14 seguimos o ahi le paramos????

[238] **Yolanda:** No sé, dejame ver, tenia una pregunta de un problema, pero no la encuentro

[239] **Yolanda:** No, no lo encuentro

*(Nuevamente se presenta una desconexión)

[240] **Pablo:** espero

[241] **Yolanda:** que fue lo ultimo que te llego?

[242] **Pablo:** de un problema que no encuentras

[243] **Yolanda:** Bien,

[244] **Yolanda:** Bueno, pues no lo encuentro, pero me parece bien el ir comparando la velocidad comparando cada intervalo de tiempo con la distancia avanzada

[245] **Pablo:** si fijate que uno puede ir realizando las graficas mentalmente si conoces

[246] **Yolanda:** Se puede ir haciendo un seguimiento uno -a- uno, i.e., a cada parte de la gráfica le puedes relacionar un movimiento de Anahí o el llenado de recipientes

[247] **Pablo:** el comportamiento de ellas previamente, si no,no

[248] **Pablo:** si creo que si continua

[249] **Yolanda:** Fijate que se lo plantee a mi sobrinito, un niño de casi 5 años y el lo gráfico sobre una linea recta y cuando Anahi iba mas rápido, dibujaba la línea mas fuerte

[250] **Yolanda:** qué tal?

[251] **Pablo:** pues esta bien, pero que mas hizo o te dijo????

[252] **Yolanda:** Yo se lo explique primero, dibujando un linea de la casa a la escuela, y el luego me lo explico contandome un cuento y eso, cuando Anahi iba mas rapido el dibujaba masfuerte

[253] **Pablo:** que interesante

[254] **Yolanda:** Me llama la atención que él distinga con algo la diferencia de velocidades

[255] **Pablo:** si verdad,yo creo que lo relaciona con mas fuerte

[256] **Yolanda:** Sí, y la necesidad grafica de distinguirlo

[256] **Yolanda:** por qué habria que hacer eso?

[257] **Pablo:** eso lo intuye

[258] **Yolanda:** Sí, eso creo

[259] **Yolanda:** Qué te parece si aquí le dejamos?

[260] **Pablo:** nada más una última pregunta

[261] **Pablo:** haber si coincidimos

[262] **Pablo:** que relación encontraste entre los incrementos de las alturas y el punto de inflexión

[263] **Pablo:** en la secuencia1 definición de curvas

[264] **Pablo:** la última parte de la actividad 2

[265] **Yolanda:** En donde hay incisos qué responder?

[266] **Pablo:** si

[267] **Yolanda:** Bueno, si nos fijamos en las subtangentes, donde se encuentren las de mayor magnitud, es en donde se encuentra un punto de inflexión

[267] **Yolanda:** Si seguimos la gráfica de las alturas, pues en donde esten las más altas, estamos cerca de un punto de inflexión

[268] **Pablo:** exactamente

[269] **Yolanda:** Así es

[270] **Yolanda:** Bueno, son las 10:27, ¿damos por cerrada la sesión?

[271] **Pablo:** si creo que fue muy interesante

[272] **Pablo:** platicar contigo de estos temas

[273] **Yolanda:** Hay que hacer un reporte personal de lo hecho y enviarle lo dicho a Mario

[274] **Yolanda:** Gracias, aunque se siente algo raro no tener a las personas cerca para discutirlos

[275] **Pablo:** no, yo le envie la primera parte tal y como esá

[276] **Yolanda:** sobre todo,si estuvieramos frente a frente tardariamos menos

[277] **Pablo:** si se siente raro pero tambien nos ayuda a resolver algunos problemas técnicos

[278] **Yolanda:** Hay que enviarle todo, tal y como esta y hacerle un reporte personal,supongo de cómo percibimos lo hecho

[279] **Pablo:** no

[280] **Yolanda:** No que?

[281] **Pablo:** de hecho en este moemnto estamos concluyen do la activdad

[282] **Pablo:** de manera descriptiva

[283] **Yolanda:** no entiendo

[284] **Pablo:** al comentar nuestro parecer

[285] **Pablo:** estamos concluyendo la actividad

[286] **Yolanda:** O sea, que solo lo enviamos y ya?

[287] **Pablo:** si.oye ya hiciste la actividad final??????

[288] **Yolanda:** Las reflexiones finales?

[289] **Pablo:** si

[290] **Yolanda:** La estoy haciendo, me está costando trabajo hilar todas las lecturas con el tema del curso

[291] **Yolanda:** No debido a que no tengan relación, sino al abarcalos a todas las lecturas

[292] **Pablo:** yo las estoy haciendo una por una y al final en la conclusion las voy a combinar

[293] **Yolanda:** Eso es agarrar al toro por los cuernos

[294] **Yolanda:** El problema es que todavia no tengo una idea de cómo los quiero unir

[295] **Pablo:** yo tampoco, pero conforme avance algo se me ocurrira

[296] **Yolanda:** Afortunadamente, si dieron un poco de tiempo mas

[297] **Pablo:** si

[298] **Pablo:** bueno nos vemos

[299] **Yolanda:** Esta platica, cambiaria en algo lo que hicieste en tus actividades?

[300] **Pablo:** tal vez en el 1.6

[301] **Pablo:** pero creo que si

[302] **Yolanda:** Bueno, hasta luego

[303] **Pablo:** bye, seguimos en contacto, que tengas un bonito Domingo

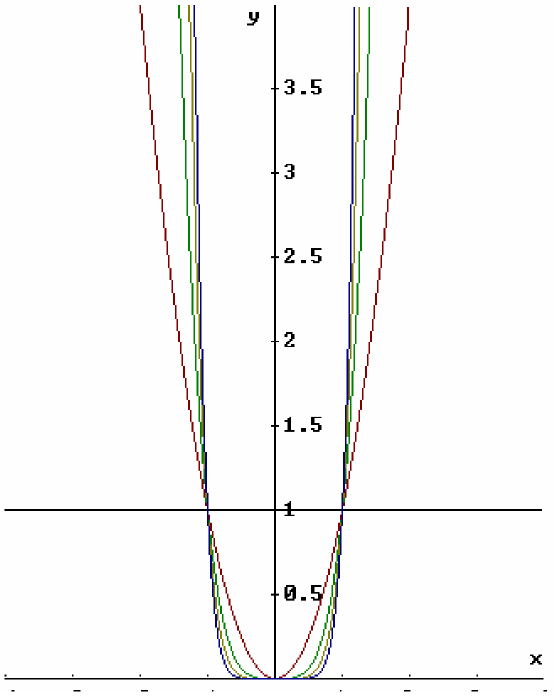
ANEXO 2.

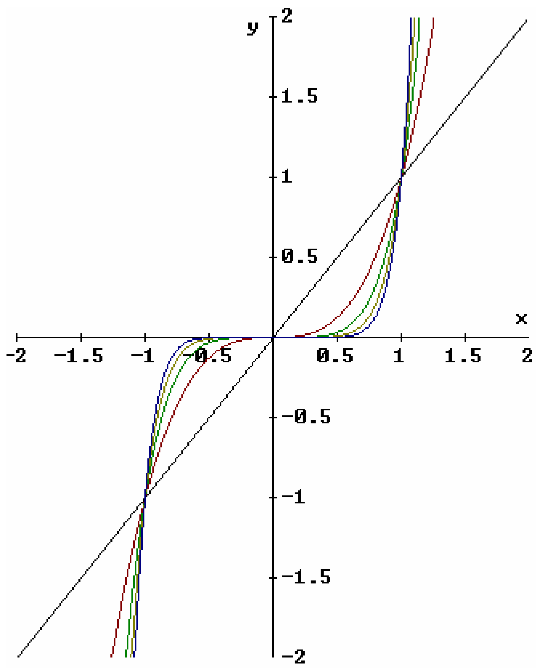
TRABAJO FINAL ENTREGADO POR LOS ESTUDIANTES QUE PARTICIPAN EN LA INTERACCIÓN ANALIZADA EN EL CAPÍTULO CUATRO

ACTIVIDAD A1.1[1]

A1.1.1.

Para el caso $y = x^n$, los gráficos que se obtienen para diferentes valores n son los que aparecen debajo. En la figura de la izquierda:, se considera el caso de n par y en el de la izquierda, para n impar.





A1.1.2.

Si $n = 0$, obtenemos la recta de ecuación $y = –1$ (figura 1), y si $n = 1$, la $y = x$ (figura 2 recta en negro). Para el resto de los casos, obtenemos curvas de forma parabólica o similares a la parábola cúbica ($y = x^3$). Así, si n es par, la curva estará siempre por "encima" del eje de las x (la función es siempre mayor o igual que cero), es par (simétrica respecto del eje de las ordenadas) pues para reales opuestos, tenemos la misma imagen.. Si n es impar, la curva está por encima del eje de las abscisas para $x > 0$ y por debajo para $x < 0$. En este caso, se trata de funciones impares (simétricas respecto al origen de coordenadas), a reales opuestos corresponden imágenes opuestas.

En ambos casos, admiten raíz cero.

Para valores de x tales que $|x| < 1$, a medida que aumenta el exponente, disminuye el valor absoluto de la imagen correspondiente a cada x. Para $|x| = 1$, todas toman el valor 1 (si n es par) o 1 y –1 si n es impar. Para $|x| > 1$, los valores absolutos de las imágenes aumentan al hacerlo el exponente.

[1] Se utilizarán representaciones gráficas obtenidas con el programa Derive 5(TM).

A1.2

A1.2.1.

Veamos ahora los efectos en $y = a + bx$.

Dejando fijo el parámetro *b*, al aumentar el valor de *a*, la curva "sube". Si tomamos como base el caso de $a = 0$ ($y = x$), tenemos que si $a > 0$, la gráfica sufre un desplazamiento en sentido vertical hacia arriba (o mejor dicho una traslación de vector paralelo al eje *y*, sentido positivo –hacia arriba– y módulo *a*). Si $a<0$, es exactamente al revés: el desplazamiento es hacia abajo (traslación de vector paralelo al eje *y*, sentido negativo –hacia abajo– y módulo *a*)

Si ahora fijamos el parámetro *a* y hacemos variar *b*:

En este caso, tenemos una haz de rectas, que pasan todas por el punto de coordenadas (0, *b*) (o lo que es lo mismo, que cortan al eje *y* en el punto de ordenada *b*). Si $a > 0$, tenemos funciones crecientes, con mayor velocidad de crecimiento[2] cuanto mayor es el valor de *a* (la ordenada aumenta más, para igual abscisa, a medida que aumenta *a*). Si $a = 0$, tenemos una recta horizontal.

Si $a < 0$, tenemos funciones decrecientes, con mayor decrecimiento cuanto menor es el valor de *a* (la ordenada disminuye más, para igual abscisa, a medida que aumenta *a*).

A1.3

A1.3.A)

Para el caso de $y = a + bx + cx^2$, (para valores enteros del parámetro *a*):

La variación del valor de *a*, en este caso, permite la traslación de la curva, hacia "arriba" o hacia "abajo". Todas las parábolas tienen el mismo eje de simetría, la misma "abertura" (considerando como tal la distancia entre dos puntos de igual ordenada). La velocidad de crecimiento o decrecimiento de todas las parábolas es similar.

Para el caso de $y = a + bx + cx^2$: Al variar el parámetro *b*, hay un desplazamiento del eje de simetría de la parábola. Así, si *b* es negativo, el desplazamiento del eje de simetría será hacia la derecha y si es negativo, será hacia la izquierda.

Por otro lado, considerando la ecuación de la parábola en su forma canónica general:

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - k),$$

---

[2] Por velocidad de crecimiento estoy considerando la comparación entre la variación de ordenadas respecto a la de las abscisas. Así, para $y = 2x$ e $y = 3x$, para una variación de 1 en las abscisas, tendremos una de 2 en el primer caso y de 3 en el segundo para las ordenadas correspondientes, entonces digo que la segunda crece más rápido que la primera.

y desarrollándola, obtenemos lo siguiente:

$$x^2 - 2xh + h^2 = 4py - 4pk.$$

En este caso, la pendiente de la tangente a la parábola en el punto (0,2)cambiará conforme cambiemos 2*h*; y 2*h* es el coeficiente "*b*" de nuestra ecuación.

Para el caso de $y = a + bx + cx^2$, tomando como parámetro variable a *c*, si *c* es mayor que cero, la concavidad es positiva, si $c = 0$ tenemos una recta y si $c < 0$, concavidad negativa. O sea que al variar el término "c" estaremos variando todas las características de la parábola, tanto posición como forma.

La combinación de variaciones de los tres parámetros, permite el desplazamiento de la curva entonces en sentidos vertical y horizontal y a su vez una variación de su concavidad.
Por otra parte, cuanto mayor es el valor absoluto de *c*, mayor es la velocidad de variación (crecimiento o decrecimiento, según corresponda)

A1.3.b)
Para el caso de $y = a + bx + dx^3$, para valores del parámetro *a*
La variación del parámetro *a*, produce en este caso una traslación en dirección paralela al eje de las ordenadas. Hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

Para el caso de $y = a + bx + dx^3$, considerando a *b* como parámetro:
Si *b* y *d* tienen igual signo, la función solo crece o decrece. A mayor valor absoluto de *d*, mayor velocidad de crecimiento o decrecimiento.
Si $b = 0$, tendrá un punto de inflexión con tangente horizontal y será siempre creciente o decreciente, según el signo del coeficiente *d*.
Si *b* y *d* tienen distinto signo, la función tiene máximo y mínimo relativos.

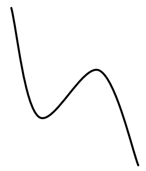
Si $d > 0$, tiene la forma:

Al aumentar el valor absoluto de *d*. disminuye la distancia entre las abscisas de los extremos relativos y también disminuye la distancia entre sus ordenadas.

Si $d < 0$, la forma es

y valen las mismas consideraciones al aumentar el valor absoluto de *d*.

Para el caso de $y = a + bx + dx^3$, tomando como parámetro a *d* valen similares consideraciones que en el caso anterior.
Si *b* y *d* tienen igual signo, la función solo crece o decrece, (según el signo de *d*).
Así, si $d < 0$. la función tiene la forma:



Al aumentar el valor absoluto de *d*, la distancia entre las abscisas de los extremos relativos disminuye, así como también la de las ordenadas de los mismos.

Si $d > 0$ y $b < 0$, la función tiene la forma

y vale la misma observación con respecto a las distancias respecto al crecimiento del valor absoluto de *d*.

A1.3.c)
Para el caso de $y = a + bx + cx^2 + dx^4$, para valores del parámetro *a* la variación del mismo produce un desplazamiento en dirección vertical, hacia arriba o hacia abajo según sea $a > 0$ o $a > 0$ respectivamente.

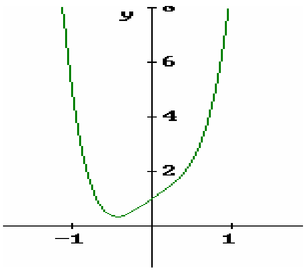
Para el caso de $y = a + bx + cx^2 + dx^4$, tomando como parámetro a *b*:

La variación de *b* produce un desplazamiento de la gráfica en dirección horizontal, a derecha o izquierda (siempre que mantenga su "forma").

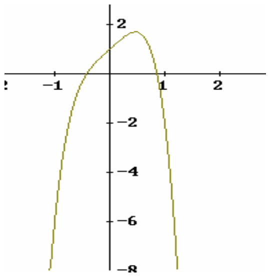
Para el caso de $y = a + bx + cx^2 + dx^4$, tomando como parámetro a *c*:

Si *c* y *e* tienen igual signo, la función tiene forma parabólica, de concavidad positiva o negativa, según el signo de *e*.

Si $c = 0$ y $e \neq 0$ el gráfico es de la forma:

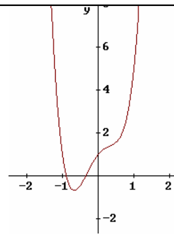
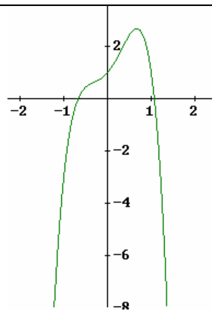


o



dependiendo del signo de *e*.

Si *c* y *e* tiene diferente signo, hay dos situaciones posibles:

$e > 0$	tiene la forma de la figura, con la ordenada del mínimo de la derecha menor que el de la izquierda	
$e < 0$	tiene la forma de la figura, con la ordenada del máximo de la izquierda menor que el de la derecha	

Si aumenta el valor absoluto de *c* (sin que pierda la "forma" la curva) disminuye la distancia entre abscisas y ordenadas de máximos y mínimos relativos

Para el caso de $y = a + bx + cx^2 + dx^4$, para valores del parámetro *d*, valen similares consideraciones.

Actividad A1.4

	fórmula propuesta
A	$y = 1{,}5x + 1$
B	$y = -1{,}6x + 0{,}8$
C	$y = -1{,}818x - 2$
D	$y = 0{,}8x^2 + 0{,}8x + 1$
E	$y = -x^2 + 2{,}4x + 2{,}06$
F	$y = 3x^2 - 2x - 2{,}6$
G	$y = 3x - x^2 + x^4$
H	$y = 2x^4 - 5x^2 - 2x$
I	$y = x^4 + 3x^2 + x + 0{,}1$
J	$y = 3x^3 + 2{,}5x^2 - 2{,}33x + 1$
K	$y = -3x^3 + 2x - 1$
L	$y = -8x^3 - 2x - 1$